Zur Theorie der Advektion

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde genehmigt von der Philosophischen Fakultät der Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin

Von

Joachim Bartsch

aus Berlin-Zehlendorf

Tag der Promotion: 16. Oktober 1935
Tag der mündlichen Prüfung: 27. Juni 1935

Großbetrieb für Dissertationsdruck von Robert Noske in Borna-Leipzig
1935

400

Referenten: Professor Dr. H. v. Ficker
Professor Dr. A. Defant

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Meiner lieben Mutter
in Dankbarkeit gewidmet

400

Inhalt.

		Seite
I.	Einleitung	1
II.	Die Rossbysche spezielle Advektionstheorie	4
III.	Die Rossbysche verallgemeinerte Advektionstheorie	6
IV.	Anwendungen der Rossbyschen Theorien	10
V.	Die Ertel-Lische Advektionstheorie	13
VI.	Anwendungen der Ertel-Lischen Theorie	16
VII.	Einwände gegen die Ertel-Lische Theorie	16
VIII.	Bemerkungen zu zwei Arbeiten von Thomas	21
IX.	Die Grundlagen einer neuen Advektionstheorie	23
X.	Einige Anwendungen der neuen Grundformel	32
	Zusammenfassung	40
	Literaturverzeichnis	41

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41550815_0106

I. Einleitung.

Eine der wichtigsten Grundlagen für das Verständnis des Wettergeschehens ist die Kenntnis des Ursprungs der Luftdruckänderungen. Unter anderem handelt es sich dabei um die Frage, ob die Stratosphäre einen ebenso entscheidenden Einfluß auf die Vorgänge in Bodennähe hat wie die Troposphäre, um die Frage also, die lange Zeit die Streitfrage zwischen der deutschen und der norwegischen Meteorologenschule gewesen ist. Bekanntlich haben sich aber die Norweger, die einen solchen bedeutenden Einfluß der Stratosphäre bezweifelt hatten, jetzt mehr der Auffassung der deutschen und österreichischen Schule genähert, die schon lange auf Grund mannigfacher Untersuchungen v. Fickers[1)2)3)4)] und anderer zur Überzeugung gekommen war, daß die stratosphärischen Vorgänge eine große, manchmal sogar entscheidende Bedeutung für den Witterungsablauf in den untersten Atmosphärenschichten haben.

Um mit Hilfe von Beobachtungen zu einer Lösung der angedeuteten Frage kommen zu können, muß man in der Lage sein, die Bodendruckänderung in die Beiträge der einzelnen Schichten aufzuspalten. Es ergibt sich daher vor allem die Forderung nach einer Theorie, welche die Aufteilung ermöglicht.

Sieht man von gelegentlich zu erwartenden, rein dynamischen Effekten*) ab, so muß man die Ursache von Bodendruckänderungen in Massenänderungen innerhalb der über dem Beobachtungsort lagernden Luftsäule suchen. Die Aufgabe der zu entwickelnden Theorie ist somit die Schaffung eines Zusammenhanges zwischen der in einer bestimmten Zeit in jeder einzelnen Schicht einer gegebenen Luftsäule vor sich gegangenen Massenzufuhr (positiv oder negativ), mit anderen Worten: der in jeder Schicht erfolgten Advektion, einerseits und den in der gleichen Zeit vor sich gegangenen Änderungen der durch Beobachtungen, d. h. in diesem Falle durch aerologische Aufstiege, erfaßbaren Zustandsfunktionen andererseits.

---

*) Palmén[8)] sieht allerdings alle aus der Stratosphäre stammenden Druckänderungen als solche rein dynamisch bedingte an.

Statt die Massenänderungen auf nichtperiodische Advektionsvorgänge zurückzuführen, wie es z. B. v. Ficker[3]) getan hat, kann man sie auch durch Wellen an einer Diskontinuitätsfläche (z. B. Grenze zwischen Troposphäre und Stratospäre) erzeugt denken, eine Hypothese, die vor allem Defant[5])[6])[7]) ausführlich behandelt hat. Die vorliegende Arbeit soll sich jedoch ausschließlich mit den Advektionstheorien befassen.

Hätte man es mit einer inkompressiblen Flüssigkeit zu tun, so wäre einfach die an einer bestimmten Stelle der betrachteten Flüssigkeitssäule auftretende Druckzunahme das Äquivalent der gesamten oberhalb vor sich gegangenen Massenzufuhr. Kompliziert wird das Problem erst durch die Kompressibilität der Luft. Jede irgendwo vor sich gehende Massenzufuhr komprimiert die darunterliegende Luftsäule, so daß vertikale Massenverlagerungen auftreten, die ihrerseits lokale Druckänderungen bedingen; und der Betrag der Kompression hängt wiederum ab von dem thermodynamischen Weg, auf welchem der Prozeß erfolgt.

Nach mehreren vorbereitenden Arbeiten Exners[9]), Steiners[10]) und Haurwitz'[11]) gab als erster Rossby[12])[13]) eine Theorie der Advektion, deren Anwendung auf beobachtete Fälle allerdings noch zu keinem befriedigenden Ergebnis führte. Vor kurzem veröffentlichte dann Ertel[14]) gemeinsam mit Li eine neue Advektionstheorie, bei der die bei Rossby entstehenden unwahrscheinlichen Resultate nicht mehr auftreten. Trotzdem erweist sich auch diese Theorie als verbesserungsbedürftig, wie in dieser Arbeit ausgeführt werden soll.

Bevor nun die Grundlagen einer neuen Advektionstheorie entwickelt werden, sollen im ersten Teil der Arbeit die bisher vorhandenen Theorien ausführlich wiedergegeben und diskutiert werden, weil sich auf diese Weise die auftretenden Probleme, sowie die Schwierigkeiten, an denen jene Theorien scheiterten, am besten darstellen lassen und der Weg, der zu einer neuen Theorie führt, somit am deutlichsten vorgezeichnet werden kann.

Es seien zunächst noch einige Vorbemerkungen gegeben. Wie schon erwähnt, liegen die Schwierigkeiten in den durch die Kompressibilität bedingten vertikalen Massenverlagerungen, die entweder einen Teil der ursprünglich oberhalb des betrachteten Niveaus befindlichen Luftsäule unter dieses herabsinken lassen und dadurch eine zusätzliche Druckverminderung hervorrufen oder umgekehrt von unten her neue Luftmassen über das Niveau emporsteigen lassen und dadurch einen positiven Anteil der Druckänderung erzeugen. Diese zusätzlichen Anteile der Druckänderung lassen sich angeben, sobald man die Größe der vertikalen Verschiebung δz kennt, welche die ursprüng-

lich im betrachteten Niveau befindliche Luftschicht erfährt. Es wird ja dann einfach eine Luftsäule der Höhe δz fortgenommen oder hinzugefügt, und deren Druckeffekt ist $g\varrho\,\delta z$. — Mathematisch gesprochen, handelt es sich um die Bestimmung des Unterschiedes zwischen individueller und lokaler Druckänderung. Die individuelle Druckänderung ist ja diejenige, welche ein sich mit der betrachteten Schicht mitbewegender Beobachter messen würde, und daher gerade das gesuchte Äquivalent der oberhalb dieser Schicht erfolgten advektiven Massenänderung. Nennen wir diese Druckänderung $\delta\pi$ und die lokale δp, so ist ihr Zusammenhang

$$(1) \qquad \delta\pi = \delta p + \frac{\partial p}{\partial z}\,\delta z = \delta p - g\varrho\,\delta z^{*}),$$

was in Übereinstimmung mit der obigen Überlegung für die beobachtete Druckänderung δp ergibt:

$$\delta p = \delta\pi + g\varrho\,\delta z.$$

Es taucht hier die Frage auf, was man denn unter δz zu verstehen habe, wenn durch Advektion die Luft der betrachteten Schicht vollständig durch andere Luft ersetzt wurde, so daß es unmöglich ist, irgendeine Luftschicht mit der ursprünglichen zu identifizieren. Man denke sich zu diesem Zwecke innerhalb der Luftsäule eine gewichtlose, luftundurchlässige, horizontale Wand, die vertikal verschiebbar ist und zu Beginn in der Höhe z_1 liege. Sie wird dann nach Beendigung des Advektionsvorganges in der gesuchten Höhe $z_1 + \delta z_1$ liegen. Man kann auch diese Überlegung anstellen: Wenn man eine unendlich dünne Luftschicht in der Höhe z_1 von den Advektionsvorgängen ausschließt, so wird keine wesentliche Veränderung des Gesamtvorganges entstehen, und man wird die ausgezeichnete Luftschicht wiederum in der Höhe $z_1 + \delta z_1$ finden. Dieselbe Größe δz_1 (jedenfalls bis auf kleine Restglieder höherer Ordnung) erhält man schließlich, wenn man die in der Höhe z_1 auftretenden Vertikalgeschwindigkeiten über das Zeitintervall δt, innerhalb dessen die Advektion vor sich geht, integriert.

Die Kernfrage aller Advektionstheorien ist mithin die nach der Bestimmung des δz. Gleichung (1) zeigt uns, daß $\delta\pi$ durch die zwei Größen δp und δz bestimmt ist; man braucht also außer δp noch

---

*) Daß man die statische Grundgleichung $\frac{\partial p}{\partial z} = -g\varrho$ anzuwenden berechtigt ist, bedarf der Voraussetzung, daß alle Abweichungen vom Gleichgewichtszustand verschwindend klein bleiben (quasistatische Vorgänge). Diese Voraussetzung ist bei den meisten Advektionsvorgängen hinreichend erfüllt.

eine zweite beobachtete Funktion, falls es nicht gelingt, δz direkt mit $\delta\pi$ oder δp in Zusammenhang zu bringen. In den Theorien ist deshalb zunächst versucht worden, zwischen δz einerseits und $\delta\pi$ und δp andererseits ohne Zuhilfenahme einer zweiten beobachteten Funktion eine Beziehung herzustellen.

Ist schließlich $\delta\pi$ bekannt, so ist damit auch das Advektionsproblem gelöst, denn $\delta\pi$ gibt den gesamten Effekt der Advektion in den Schichten oberhalb einer Höhe z, die Differentiation nach z also den Beitrag jeder einzelnen Schicht zum Druckeffekt und die Division durch $-g$ hieraus die in der betreffenden Schicht vor sich gegangene Massenzufuhr.

II. Die Rossbysche[12]) spezielle Advektionstheorie*).

In dieser Theorie wird die spezielle Annahme gemacht, daß nur oberhalb des betrachteten Niveaus Advektion erfolgt sei. Außerdem ist, ebenso wie in allen später wiedergegebenen Theorien, adiabatische Kompression bzw. Dilatation vorausgesetzt. Eine Schicht von der Höhe dz möge durch die Kompression (positiv oder negativ) die Höhe $dz_1 = dz + \delta(dz)$ angenommen haben ($\delta(dz)$ ist bei wirklicher Kompression negativ). Die Größe $\delta(dz)$ kann dann auch geschrieben werden $d(\delta z)$, d. h. sie ist derjenige Anteil des gesamten δz, der durch die Kompression der betrachteten Schicht hervorgerufen wird. Faßt man die Anteile sämtlicher Schichten zwischen Erdboden und der Höhe z zusammen, so erhält man, da ja am Boden $\delta z_0 = 0$, genau die in der Höhe z auftretende Vertikalverschiebung

$$\delta z = \int_0^z \delta(dz). \tag{2}$$

Aus $\delta z_0 = 0$ folgt natürlich, daß $\delta\pi$ und δp am Boden identisch sind.

Es ist bei adiabatischer Kompression

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = \frac{1}{\varkappa}\frac{dp}{p}, \tag{3}$$

also im betrachteten Falle

$$\delta\varrho = \varrho\frac{\delta\pi}{\varkappa p}. \tag{3a}$$

*) Die Ableitungen der verschiedenen Theorien sind nicht genau übernommen, sondern teilweise aus Gründen der Einheitlichkeit aller Darstellungen etwas abgeändert worden.

Herrschte daher im Anfangszustande die Dichte ϱ, so herrscht im Endzustande die Dichte

$$\varrho_1 = \varrho\left(1+\frac{\delta\pi}{\varkappa p}\right). \tag{4}$$

Nach Voraussetzung sollte nur oberhalb z Advektion eingetreten sein, also blieb die Masse in allen Schichten von z ab abwärts konstant. Es verhält sich somit in allen diesen Schichten Anfangshöhe zu Endhöhe umgekehrt wie Anfangsdichte zu Enddichte (Kontinuitätsgleichung). Daraus folgt

$$\frac{dz_1}{dz} = \frac{\varrho}{\varrho_1}, \tag{5}$$

d. h.

$$dz_1 = \frac{dz}{1+\dfrac{\delta\pi}{\varkappa p}} \approx dz\left(1-\frac{\delta\pi}{\varkappa p}\right)^{*})$$

oder

$$d(\delta z) = \delta(dz) = dz_1 - dz = -\frac{\delta\pi}{\varkappa p}\,dz, \tag{6}$$

bzw.

$$\delta z = -\int_0^z \frac{\delta\pi}{\varkappa p}dz = -\frac{\delta\pi}{\varkappa}\int_0^z \frac{dz}{p}, \tag{6 a}$$

da ja $\delta\pi$ zwischen 0 und z nach Voraussetzung konstant ist.

In Verbindung mit Gleichung (1) erhält man schließlich

$$\delta\pi = \delta p + g\varrho\frac{\delta\pi}{\varkappa}\int_0^z \frac{dz}{p} \tag{7}$$

oder

$$\frac{\delta p}{\delta\pi} = 1 - \frac{g\varrho}{\varkappa}\int_0^z \frac{dz}{p}. \tag{7 a}$$

---

*) Das Zeichen $\approx$ soll heißen: gleich bis auf kleine Größen zweiter oder höherer Ordnung.

III. Die Rossbysche[13]) verallgemeinerte Advektionstheorie.

Es handelt sich in dieser Verallgemeinerung um den Verzicht auf diejenige Voraussetzung, welche einen Advektionsvorgang innerhalb und unterhalb der betrachteten Schicht ausschloß. Nunmehr wird $\delta\pi$ eine Funktion von z, seine Änderung innerhalb einer Schicht ist das Äquivalent der in dieser Schicht erfolgten Massenzufuhr. Diese Advektion in jeder Schicht wird von Rossby noch einer besonderen Bedingung unterworfen; er setzt nämlich voraus, daß jede Schicht von der Dicke dz durch eine solche gleicher Dicke ersetzt werde, so daß die Massenänderung nur durch Dichteänderung, d. h. durch Zufuhr anders temperierter Luft, entsteht. Das $d(\delta z)$ ist dann wie vorher nur bedingt durch die Kompression infolge der Advektion oberhalb z.

Die Advektion innerhalb der betrachteten Schicht geht nun während der Verschiebung dieser Schicht um dz vor sich, stammt also, streng genommen, nicht nur aus der ursprünglichen Höhe z. Man kann aber im allgemeinen annehmen, daß sich die Massenzufuhr längs des Weges δz nur unwesentlich ändert, so daß man den Advektionsvorgang in zwei Schritte zerlegen kann. Man läßt als erstes die Advektion in allen Schichten vor sich gehen, ohne daß vertikale Verschiebungen auftreten, etwa indem man sich zwischen je zwei Schichten eine unverrückbare Wand eingeschaltet denkt; als zweites entfernt man nach vollzogener Massenzufuhr die Wände, worauf sich dann die zur Wiederherstellung des statischen Gleichgewichts notwendigen Vertikalbewegungen vollziehen.

Es sei $\delta_a \varrho$ die durch die Advektion bedingte Dichteänderung, so daß in allen Schichten nach dem ersten Schritt die Dichte $\varrho_1 = \varrho + \delta_a \varrho$ herrscht, während die Höhe der Schichten dz geblieben ist. Im zweiten Schritt wird nun dies ϱ_1 durch $\delta\pi$ verändert, so daß nunmehr herrscht

$$\varrho_2 = \varrho_1 \left(1 + \frac{\delta\pi}{\varkappa p}\right). \tag{8}$$

Da die Masse jetzt konstant geblieben ist, gilt nach der Kontinuitätsgleichung dann

$$\frac{dz_2}{dz} = \frac{\varrho_1}{\varrho_2} = \frac{1}{1 + \frac{\delta\pi}{\varkappa p}} \approx 1 - \frac{\delta\pi}{\varkappa p}$$

oder

$$dz_2 = dz\left(1 - \frac{\delta\pi}{\varkappa p}\right),$$

mithin

$$d(\delta z) = \delta(dz) = dz_2 - dz = -\frac{\delta\pi}{\varkappa p}dz.$$

Es wird also wie in der speziellen Theorie

$$\delta z = -\int_0^z \frac{\delta\pi}{\varkappa p}dz, \tag{9}$$

nur darf man wegen der Veränderlichkeit von $\delta\pi$ mit z das $\delta\pi$ nicht mehr aus dem Integral herausnehmen. Mit Hilfe der allgemeingültigen Gleichung (1) erhält man folgende Beziehung zwischen $\delta\pi$ und δp:

$$\delta\pi = \delta p + g\varrho\int_0^z \frac{\delta\pi}{\varkappa p}dz, \tag{10}$$

Zur Auflösung von Gleichung (10) schreiben wir diese zunächst:

$$\frac{1}{g\varrho}(\delta\pi - \delta p) = \int_0^z \frac{\delta\pi}{\varkappa p}dz$$

und differenzieren nach z:

$$-\frac{1}{g\varrho^2}\frac{\partial\varrho}{\partial z}(\delta\pi - \delta p) + \frac{1}{g\varrho}\frac{\partial}{\partial z}(\delta\pi - \delta p) = \frac{\delta\pi}{\varkappa p}.$$

Wir multiplizieren nun mit $g\varrho$ und ordnen etwas um:

$$\frac{\partial}{\partial z}(\delta\pi - \delta p) - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial\varrho}{\partial z}(\delta\pi - \delta p) = \frac{g\varrho}{\varkappa p}(\delta\pi - \delta p) + g\varrho\frac{\delta p}{\varkappa p}.$$

Hieraus ergibt sich:

$$\frac{\partial}{\partial z}(\delta\pi - \delta p) + (\delta\pi - \delta p)\left[-\frac{g\varrho}{\varkappa p} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial\varrho}{\partial z}\right] = g\varrho\frac{\delta p}{\varkappa p}. \tag{11}$$

Nun ist $-g\varrho = \frac{\partial p}{\partial z}$, also lautet jetzt Gleichung (11):

$$\frac{\partial}{\partial z}(\delta\pi - \delta p) + (\delta\pi - \delta p)\left[\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial}{\partial z}\ln p - \frac{\partial}{\partial z}\ln\varrho\right] = g\varrho\frac{\delta p}{\varkappa p}$$

oder

$$\frac{\partial}{\partial z}(\delta\pi - \delta p) + (\delta\pi - \delta p)\frac{\partial}{\partial z}\left(\ln\frac{p^{\frac{1}{\varkappa}}}{\varrho}\right) = g\varrho\frac{\delta p}{\varkappa p}. \tag{12}$$

Diese Gleichung läßt sich integrieren, und man erhält:

$$\delta\pi - \delta p = \left(\frac{p^{\frac{1}{\varkappa}}}{\varrho}\right)^{-1}\int_0^z \frac{p^{\frac{1}{\varkappa}}}{\varrho} g\varrho\frac{\delta p}{\varkappa p}dz \tag{13}$$

oder

$$\delta\pi = \delta p + \frac{g}{\varkappa}\left(\frac{p^{\frac{1}{\varkappa}}}{\varrho}\right)^{-1}\cdot\int_0^z p^{\frac{1}{\varkappa}-1}\delta p\, dz. \tag{13 a}$$

ϱ läßt sich durch $\frac{p}{RT}$ ersetzen, und es wird

$$\delta\pi = \delta p + \frac{g}{\varkappa R}\left(T\cdot p^{\frac{1}{\varkappa}-1}\right)^{-1}\int_0^z p^{\frac{1}{\varkappa}-1}\delta p\, dz. \tag{13 b}$$

Führt man die potentielle Temperatur

$$\vartheta = T\cdot p^{\frac{1}{\varkappa}-1}\cdot p_0^{\,1-\frac{1}{\varkappa}}$$

ein, so erhält man, da $p_0^{\,1-\frac{1}{\varkappa}}$ als Konstante aus dem Integral genommen werden kann, die übersichtlichere Formel

$$\delta\pi = \delta p + \frac{g}{\varkappa R}\vartheta^{-1}\int_0^z \frac{\vartheta}{T}\delta p\, dz. \tag{14}$$

Man kann nun auch die beobachtete Temperaturänderung erklären. Sie setzt sich aus drei Teilen zusammen; der erste Teil ist der durch die Advektion selbst bedingte (äquivalent dem $\delta_a\varrho$), der zweite ist verursacht durch die adiabatische Kompression, der dritte schließlich rührt von der Verschiebung der Schichten um δz her. Der advektive Anteil sei $\delta_a T$. Der adiabatische Anteil ist gegeben durch die Gleichung

(15) $$\frac{\delta' T}{T} = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \frac{\delta \pi}{p}.$$

Es ist also die individuelle Temperaturänderung

$$\delta_i T = \delta_a T + \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} T \frac{\delta \pi}{p}.$$

Der Verschiebungsanteil, also der Unterschied zwischen individueller und lokaler Temperaturänderung, ist $\frac{\partial T}{\partial z} \delta z$, so daß die lokale Temperaturänderung den Wert hat:

$$\delta T = \delta_i T - \frac{\partial T}{\partial z} \delta z = \delta_a T + \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} T \frac{\delta \pi}{p} - \frac{\partial T}{\partial z} \delta z.$$

Da aber δT die gemessene Größe ist und $\delta_a T$ unbekannt ist, wird man nach $\delta_a T$ auflösen und erhält

(16) $$\delta_a T = \delta T - \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} T \frac{\delta \pi}{p} + \frac{\partial T}{\partial z} \delta z.$$

Aus Gleichung (14) ergibt sich mit Rücksicht auf (1):

$$\delta z = -\frac{1}{\varkappa R_\varrho} \vartheta^{-1} \int_0^z \frac{\vartheta}{T} \delta p \, dz = -\frac{T}{\varkappa p} \vartheta^{-1} \int_0^z \frac{\vartheta}{T} \delta p \, dz,$$

so daß man schließlich erhält, wenn auch $\delta \pi$ nach (14) eingesetzt wurde:

(17) $$\delta_a T = \delta T - \frac{T}{\varkappa p} \left\{ (\varkappa - 1) \delta p + \left(\frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \frac{g}{R} + \frac{\partial T}{\partial z} \right) \vartheta^{-1} \int_0^z \frac{\vartheta}{T} \delta p \, dz \right\}.$$

Anschließend weist Rossby auf folgendes Problem hin: Man denke sich in irgendeiner Höhe z_1 Advektion kalter Luft; darüber möge zunächst keine Advektion erfolgen. Es wird dann die unterhalb z_1 befindliche Luftsäule komprimiert, und die ursprünglich bei z_1 liegende Schicht wird bis zur neuen Gleichgewichtslage bei $z_1 + \delta z_1$ (δz_1 ist negativ) absinken. Die oberhalb z_1 befindliche Luftsäule muß infolgedessen als Ganzes ebenfalls um den Betrag δz_1 sinken, d. h. in jeder Höhe oberhalb z_1 wird Druckverminderung eintreten. Es folgt ja auch aus Gleichung (10), daß δp keineswegs zu verschwinden braucht, wenn in derselben Höhe $\delta \pi$ verschwindet. Es wird nunmehr ein Herbeiströmen von Luft aus der Umgebung einsetzen, so lange, bis die entstandene Druckverminderung gegenüber der Umgebung wieder

ausgeglichen ist. Diese erneute Massenzufuhr vergrößert das in jeder Schicht vorhandene $\delta\pi$ um einen Betrag, der, wie Rossby auf Grund einer Art Überschlagsrechnung fand, im Extremfalle das 2,5fache des „auslösenden" $\delta\pi$ erreichen kann. Dieser Hinweis ist äußerst wichtig*) und gleichsam der Schlüssel zur weiteren Ausgestaltung der Advektionstheorie. Jedoch hat Rossby, obwohl er die Bedeutung dieses Ergebnisses an sich erkannte, seltsamerweise dessen Einfluß auf die Theorie selbst nicht näher untersucht.

IV. Anwendungen der Rossbyschen Theorien.

Rossby selbst hat nur einige Einzelfälle mit Hilfe seiner Theorien untersucht, und es ist gerade bei Einzelfällen fraglich, ob nicht durch Wärmezufuhr, die ja bei der Aufstellung der Formeln ausgeschlossen war, starke Fälschungen bedingt sind, zumal es doch sogar mehrere Möglichkeiten einer Wärmezufuhr gibt, z. B. Strahlung, Leitung, Kondensation u. a. Viel eher wäre es denkbar, daß die Verwendung von Mittelwerten, wo diese Fehler sich teilweise aufheben, einigermaßen zuverlässige Ergebnisse lieferte. So hat denn Ertel[17]), nachdem er mit Hilfe ähnlicher Überlegungen wie Rossby eine analoge Endformel herleitete und außerdem zeigte, daß diese auch für Mittelwerte gültig ist, an Hand von aerologischen Mittelwerten den mittleren Anteil jeder Schicht an der Advektion und damit den Sitz der hauptsächlichen Druckschwankungen zu bestimmen versucht. Er benutzte dabei von Schedler[18]) und Haurwitz[19]) gegebene Reihen der mittleren interdiurnen Druckänderung in jedem Kilometerniveau vom Boden bis zu 15 bzw. 17 km Höhe, und zwar getrennt nach positiven und negativen Bodendruckänderungen. Für p, ϱ und T verwandte er von Diehl[20]) gegebene, einer Normalatmosphäre entsprechende Werte, die auch allen Rechnungen dieser Arbeit zugrunde liegen. Es seien hier in Tab. 1 das Schedlersche Reihenpaar und die sich daraus ergebenden Werte der $\delta\pi$-Funktion wiedergegeben. δp gibt die beobachtete mittlere lokale Druckänderung, $\delta\pi$ das Druckäquivalent der gesamten oberhalb der betreffenden Höhe z vor sich gegangenen Advektion und $\triangle_{1000}\,\delta\pi$ den auf die direkt oberhalb z befindliche Tausend-

*) Auch v. Ficker[3]) und später Thomas[15])[16]) wiesen darauf hin, daß erst die nach der auslösenden Advektion kalter Luft in der Höhe in den Schichten darüber auftretende lokale Druckabnahme diejenige Massenzufuhr bedingt, welche die große Drucksteigerung am Boden hervorruft, wie man sie mitunter bei der Entstehung stationärer Antizyklonen beobachten kann.

meterschicht entfallenden Anteil des $\delta\pi$. Bei Verwendung des Haurwitzschen Materials bekommt man die entsprechenden Ergebnisse.

Tabelle 1.

$z =$ km	$\delta p =$ mb	$\delta\pi =$ mb	$\triangle_{1000}\delta\pi =$ mb	$\delta p =$ mb	$\delta\pi =$ mb	$\triangle_{1000}\delta\pi =$ mb
0	+ 7,04	+ 7,04	+ 0,47	− 4,28	− 4,28	− 0,49
1	+ 6,05	+ 6,57	+ 0,32	− 3,48	− 3,79	− 0,43
2	+ 5,23	+ 6,25	+ 0,34	− 2,77	− 3,36	− 0,27
3	+ 4,45	+ 5,91	+ 0,19	− 2,28	− 3,09	− 0,05
4	+ 3,91	+ 5,72	+ 0,12	− 2,04	− 3,04	− 0,07
5	+ 3,47	+ 5,60	+ 0,05	− 1,81	− 2,97	− 0,00
6	+ 3,13	+ 5,55	+ 0,07	− 1,67	− 2,97	+ 0,02
7	+ 2,80	+ 5,48	− 0,01	− 1,53	− 2,99	− 0,04
8	+ 2,55	+ 5,49	+ 0,12	− 1,36	− 2,95	− 0,08
9	+ 2,21	+ 5,37	+ 0,25	− 1,17	− 2,87	− 0,15
10	+ 1,77	+ 5,12	+ 0,36	− 0,92	− 2,72	− 0,23
11	+ 1,31	+ 4,76	+ 0,43	− 0,64	− 2,49	− 0,13
12	+ 0,89	+ 4,33	+ 0,26	− 0,52	− 2,36	− 0,08
13	+ 0,68	+ 4,07	+ 0,22	− 0,47	− 2,28	− 0,05
14	+ 0,53	+ 3,85	—	− 0,43	− 2,23	− 0,11
15	—	—	—	− 0,35	− 2,12	—

Die mitgeteilte Tabelle enthält zwei wichtige Besonderheiten. — Erstens zeigt sie zwei Maxima der $\Delta_{1000}\delta\pi$, eins in den untersten Luftschichten bis 3 oder 4 km und ein zweites sehr deutliches und daher gewiß nicht auf Zufall beruhendes an der unteren Grenze der Stratosphäre, etwa von 9 km Höhe ab. Dies ist eine Bestätigung der Ansicht v. Fickers und der anderen Meteorologen der deutsch-österreichischen Schule, daß die stratosphärischen Druckänderungen einen integrierenden Bestandteil der am Boden beobachteten Druckänderungen darstellen. Es muß allerdings später gezeigt werden, daß die Veränderungen, denen auf Grund weiter unten aufgezeigter Überlegungen die Theorie unterworfen werden muß, auf dieses Ergebnis keinen wesentlichen Einfluß haben.

Die zweite Besonderheit des in Tabelle 1 enthaltenen Ergebnisses liegt darin, daß durch die Advektion in den Schichten vom Boden bis 15 km Höhe erst etwa die Hälfte der gesamten beobachteten Bodendruckänderung erklärt ist. Es scheint undenkbar, daß die andere Hälfte der Bodendruckänderungen aus Höhen stammen soll, in denen bereits mehr als 90% der Atmosphärenmasse unter einem liegen; und es ist dies der Grund, der einen Mangel an der Rossbyschen Theorie vermuten läßt. Trotzdem soll zunächst gezeigt werden,

daß das Ergebnis der Rechnung gar nicht in dem Maße unwahrscheinlich ist, wie es im ersten Augenblick erscheint. Man muß sich hierzu an die Überlegungen erinnern, die Rossby am Schlusse seiner Theorie gegeben hat. Danach kann ja eine irgendwo vor sich gegangene „auslösende“ Advektion unter Umständen in den darüberliegenden Schichten ein Nachströmen (bzw. Abströmen) eines Mehrfachen dieser Massenzufuhr einleiten. Und Formel (6 a) zeigt ferner, daß ein gegebenes $\delta\pi$ ein um so größeres Absinken der betreffenden Schicht hervorruft, je höher diese liegt, so daß also die in großer Höhe einströmende Luft immer wieder nach unten „durchsackt“, gleichsam in ein Gefäß ohne Boden fließt, und der Zustrom somit oben viel länger erhalten bleiben muß als in den unteren Schichten. Die Existenz von Einzelfällen, die dem Ergebnis der Tabelle 1 entsprechen, ist also nicht ausgeschlossen. Die Voraussetzung hierzu ist aber die, daß in der Umgebung genügend Masse vorhanden ist, um den Zustrom aufrechtzuerhalten; das wird aber kaum mehr der Fall sein, wenn das von der „auslösenden“ Advektion betroffene Gebiet eine hinreichende horizontale Ausdehnung hat, wobei dann noch hinzukommt, daß die infolge der geringen Reibung in der Höhe recht kleine Einströmungskomponente gar nicht ausreicht, um innerhalb des Beobachtungszeitraumes von einem Tage eine vollständige Auffüllung eines einigermaßen ausgedehnten Tiefs herbeizuführen. Es dürften mithin Mittelwerte nicht mehr ein Ergebnis liefern, das extremen Bedingungen entspricht; und man ist im vorliegenden Falle wohl berechtigt, nach einem Mangel in der Theorie zu suchen.

Rossby hat, wie früher angegeben, sein $\delta\pi$ einer besonderen Voraussetzung unterworfen, indem er vorschrieb, daß bei der Advektion jede Schicht der Dicke dz durch eine solche gleicher Dicke ersetzt werde. Er hat dann die Möglichkeit einer zweiten Art Advektion erkannt, die durch die erste ausgelöst wird, hat deren Eigenschaften aber niemals untersucht. Indem Ertel nun die Rossbysche Theorie auf wirklich beobachtete Mittelwerte anwandte, hat er stillschweigend die Voraussetzung gemacht, daß der erwähnte zweite Anteil der Advektion genau dieselben Eigenschaften hat wie der „auslösende“, daß sich mithin beide nur durch ihre kausale Bedingtheit unterscheiden, während ihre Summe $\delta\pi$ nach dem Rossbyschen Vorgang bestimmbar ist. Es wäre nun naheliegend gewesen, zu untersuchen, ob nicht in dieser Voraussetzung der Gleichwertigkeit beider Anteile für die Advektion ein Fehler liegt, so daß also das Versagen der Rossbyschen Theorie im oben geschilderten Falle nur darauf zurückzuführen ist, daß eine für eine spezielle Voraussetzung geschaffene Theorie auf ein Material angewandt wurde, welches dieser

Voraussetzung nicht genügte. Ertel und Li, die die Suche nach einem Fehler in der Theorie unternahmen, gingen einen anderen Weg.

V. Die Ertel-Lische Advektionstheorie[14]).

Wenn man das, was an dem Ergebnis der Rossbyschen Theorie so unwahrscheinlich ist, näher präzisieren will, so kann man sagen, es sei die zu langsame Abnahme des $\delta\pi$ mit der Höhe. Es scheint also ein zu geringes $\frac{\partial\,\delta\pi}{\partial z}$, mit anderen Worten: ein zu kleines $\delta_a \varrho$ aus der Rechnung hervorzugehen; und es lag daher wohl nahe, nachzusuchen, ob nicht irgendwo ein Teil des $\delta_a \varrho$ verloren geht, etwa durch eine gleichzeitig auftretende Volumenvergrößerung. Ertel und Li glaubten eine solche gefunden zu haben. An Hand von Figur 1 soll dies aufgezeigt werden.

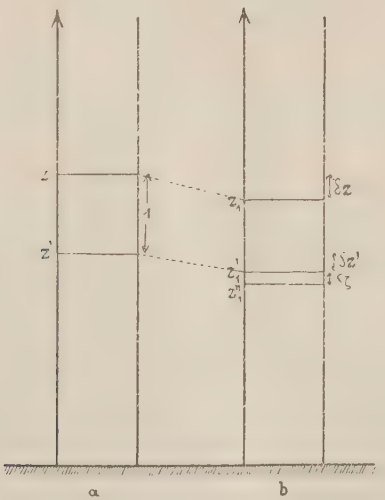

Fig. 1.

Es möge zunächst nur die Advektion oberhalb z vor sich gehen. Die obere Grenze z und die untere Grenze z' der Schicht von der Höhe 1 mögen dadurch an die Stellen z_1 und z_1' verschoben werden. Die zugehörigen δz, bzw. $\delta z'$ ergeben sich aus der Rossbyschen speziellen

Advektionstheorie. Wenn nun in der bezeichneten Schicht selbst Advektion (advektive Dichteänderung $\delta_a \varrho$) vor sich geht, so wird die untere Schichtgrenze noch weiter belastet und nimmt die Lage z_1'' ein. Aus dieser Volumenvergrößerung resultiert eine erneute individuelle Dichteänderung, die sich zur advektiven Dichteänderung $\delta_a \varrho$ und der adiabatischen Dichteänderung $\varrho \dfrac{\delta \pi}{\varkappa p}$ hinzugesellt. Zu ihrer Bestimmung muß man die Größe der Verschiebung $\delta \zeta$ von z_1' bis z_1'' kennen. Ertel und Li schließen so: Der Druckzuwachs $\delta \pi$ verursachte die Verschiebung $\delta z'$, der Druckzuwachs $g \delta_a \varrho$ somit die Verschiebung

$$\delta \zeta = g \delta_a \varrho \frac{\delta z'}{\delta \pi}.$$

Da die Dicke der Schicht ursprünglich 1 war, sich also auch jetzt nur um kleine Größen von 1 unterscheidet, so ergibt diese Verschiebung eine Dichteänderung von

$$\delta_v \varrho = \varrho \delta \zeta = g \varrho \delta_a \varrho \frac{\delta z'}{\delta \pi};$$

$g \varrho \delta z'$ ist aber gerade die zu der betreffenden Stelle gehörige Differenz $\delta p - \delta \pi$, so daß die Dichteänderung schließlich den Wert

$$\delta_v \varrho = \delta_a \varrho \frac{\delta p - \delta \pi}{\delta \pi}$$

annimmt. Die wirklich auftretende nicht-adiabatische Dichteänderung hat dann die Größe

$$\delta' \varrho = \delta_a \varrho + \delta_a \varrho \frac{\delta p - \delta \pi}{\delta \pi} = \frac{\delta p}{\delta \pi} \cdot \delta_a \varrho. \tag{18}$$

Die gesamte individuelle Dichteänderung beträgt somit

$$\delta_i \varrho = \delta' \varrho + \varrho \frac{\delta \pi}{\varkappa p} = \frac{\delta p}{\delta \pi} \delta_a \varrho + \varrho \frac{\delta \pi}{\varkappa p}, \tag{19}$$

die lokale Dichteänderung deshalb

$$\delta \varrho = \delta_i \varrho - \frac{\partial \varrho}{\partial z} \delta z = \frac{\delta p}{\delta \pi} \delta_a \varrho + \varrho \frac{\delta \pi}{\varkappa p} - \frac{\partial \varrho}{\partial z} \delta z. \tag{20}$$

In Verbindung mit (1) ergibt das

$$\delta \varrho - \frac{1}{g \varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial z} (\delta \pi - \delta p) - \delta_a \varrho \frac{\delta p}{\delta \pi} = \varrho \frac{\delta \pi}{\varkappa p}. \tag{21}$$

Aus der statischen Grundgleichung folgt, daß

$$\delta\varrho = -\frac{1}{g}\frac{\partial\delta p}{\partial z} \text{ und } \delta_a\varrho = -\frac{1}{g}\frac{\partial\delta\pi}{\partial z}$$

ist, so daß schließlich die Gleichung

$$-\frac{1}{g}\frac{\partial\delta p}{\partial z} - \frac{1}{g\varrho}\frac{\partial\varrho}{\partial z}(\delta\pi - \delta p) + \frac{1}{g}\frac{\delta p}{\delta\pi}\frac{\partial\delta\pi}{\partial z} = \varrho\frac{\delta\pi}{\varkappa p} \tag{22}$$

entsteht. Nach Division durch $-\varrho\,\delta\pi$ und etwas Umordnung läßt sich dafür schreiben

$$\frac{1}{g\varrho}\frac{1}{\delta\pi}\frac{\partial\delta p}{\partial z} - \frac{1}{g\varrho^2}\frac{\partial\varrho}{\partial z}\frac{1}{\delta\pi}\delta p - \frac{1}{g\varrho}\frac{1}{\delta\pi^2}\frac{\partial\delta\pi}{\partial z}\delta p = -\frac{1}{\varkappa p} - \frac{1}{g\varrho^2}\frac{\partial\varrho}{\partial z}$$

oder, was dasselbe ist:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{g\varrho}\frac{\delta p}{\delta\pi}\right] = \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{g\varrho}\right] - \frac{1}{\varkappa p}.$$

Die Integration liefert, entsprechend der Randbedingung

$$\left(\frac{\delta p}{\delta\pi}\right)_{z=0} = 1$$

die Beziehung

$$\frac{1}{g\varrho}\frac{\delta p}{\delta\pi} = \frac{1}{g\varrho} - \int_0^z \frac{dz}{\varkappa p}. \tag{23}$$

Die Schlußformel der Ertel-Lischen Advektionstheorie lautet somit:

$$\delta p = \delta\pi\left(1 - \frac{g\varrho}{\varkappa}\int_0^z \frac{dz}{p}\right). \tag{23a}$$

Man sieht, daß hierin die spezielle Rossbysche enthalten ist, wenn nämlich $\delta\pi$ konstant ist.

Die obige Ableitung ist die von Ertel und Li gegebene. Es läßt sich aber das Ergebnis auch auf eine andere Weise herleiten, die mit der bei der Darstellung der Rossbyschen Theorien verwandten übereinstimmt. Sie zeigt noch besonders deutlich die Verwandtschaft der Ertel-Lischen Theorie mit der Rossbyschen speziellen Advektionstheorie, die sich ja in der Endformel widerspiegelt. Diese zweite Ableitung soll daher ebenfalls, allerdings erst anläßlich der Kritik an dem Ertel-Lischen Ansatz, mitgeteilt werden, schon um eine einheitliche Darstellung aller Theorien zu geben.

VI. Anwendungen der Ertel-Lischen Theorie.

Auf dasselbe Material, auf das Ertel seinerzeit die Rossbysche allgemeine Theorie anwandte, wurde nunmehr die neue Theorie angewandt. Das Ergebnis ist in Tab. 2 wiedergegeben*).

Tabelle 2.

$z =$ km	$\delta p =$ $m\,b$	$\delta \pi =$ $m\,b$	$\triangle_{1000}\,\delta \pi =$ $m\,b$	$\delta p =$ $m\,b$	$\delta \pi =$ $m\,b$	$\triangle_{1000}\,\delta \pi =$ $m\,b$
0	+ 7,04	+ 7,04	+ 0,45	− 4,28	− 4,28	− 0,49
1	+ 6,05	+ 6,59	+ 0,39	− 3,48	− 3,79	− 0,50
2	+ 5,23	+ 6,20	+ 0,44	− 2,77	− 3,29	− 0,34
3	+ 4,45	+ 5,76	+ 0,24	− 2,28	− 2,95	− 0,07
4	+ 3,91	+ 5,52	+ 0,17	− 2,04	− 2,88	− 0,08
5	+ 3,47	+ 5,35	+ 0,07	− 1,81	− 2,80	+ 0,01
6	+ 3,13	+ 5,28	+ 0,12	− 1,67	− 2,81	+ 0,02
7	+ 2,80	+ 5,16	+ 0,03	− 1,53	− 2,83	− 0,09
8	+ 2,55	+ 5,13	+ 0,25	− 1,36	− 2,74	− 0,16
9	+ 2,21	+ 4,88	+ 0,61	− 1,17	− 2,58	− 0,37
10	+ 1,77	+ 4,27	+ 0,87	− 0,92	− 2,21	− 0,54
11	+ 1,31	+ 3,40	+ 0,99	− 0,64	− 1,67	− 0,27
12	+ 0,89	+ 2,41	+ 0,51	− 0,52	− 1,40	− 0,10
13	+ 0,68	+ 1,90	+ 0,37	− 0,47	− 1,30	− 0,07
14	+ 0,53	+ 1,53	—	− 0,43	− 1,23	− 0,21
15	—	—	—	− 0,35	− 1,02	—

Man sieht, daß die Tatsache der beiden Maxima der Advektion in den untersten Luftschichten und an der unteren Stratosphärengrenze erhalten geblieben ist und somit die v. Fickersche Anschauung auch durch diese Theorie gestützt wird. Die große Ähnlichkeit des früheren und des neuen Ergebnisses in bezug auf ihren Verlauf ist auffallend. Die Restglieder, die nach Abzug der Advektion in den unteren 15 km verbleiben, sind dagegen wesentlich kleiner geworden. Mithin sind die an eine verbesserte Theorie gestellten Erwartungen erfüllt worden.

VII. Einwände gegen die Ertel-Lische Theorie.

So gut das Ergebnis der Ertel-Lischen Theorie auch mit den Erwartungen übereinstimmt, die man an sie stellte, so lassen sich

*) Ertel und Li haben dies Ergebnis in ihrer Arbeit graphisch dargestellt.

gegen den Ansatz doch Einwände erheben. Es zeigt sich bei genauer Prüfung, daß eine ganz besondere Annahme in dem Ansatz steckt, die nur in einem sehr speziellen Falle erfüllt ist und in dem von Ertel und Li behandelten Falle wohl nicht zulässig ist. — Die Voraussetzung dafür, daß das $\delta\zeta$ die angegebene Volumenvergrößerung erzeugt, ist nämlich die, daß die obere Grenze der Schicht bei z_1 liegen bleibt. Allgemeiner ausgedrückt, lautet diese Voraussetzung: Die Verschiebung δz einer Schicht in gegebener Höhe z ist allein abhängig von der oberhalb z vor sich gegangenen Advektion. Dies ist somit die Grundlage der Ertel-Lischen Theorie, und es läßt sich deren Endformel auch allein aus dieser Voraussetzung herleiten. Wenn nämlich δz nur von der Advektion oberhalb abhängt, wenn man also zu seiner Bestimmung die unterhalb stattfindende Advektion vernachlässigen kann, so kann man für jeden Punkt z für sich die Rossbysche spezielle Advektionstheorie anwenden, und man erhält

$$\delta z = -\frac{\delta\pi(z)}{\varkappa}\int_0^z \frac{dz}{p}. \tag{24}$$

Natürlich muß für die Verschiebung einer bestimmten Schicht jeweils das zugehörige $\delta\pi$ genommen werden, so daß vor dem Integral wieder $\delta\pi(z)$ geschrieben werden muß. Aus (1) und (24) folgt dann sofort

$$\delta p = \delta\pi(z)\left(1 - \frac{g\varrho}{\varkappa}\int_0^z \frac{dz}{p}\right). \tag{23a}$$

Es soll nunmehr gezeigt werden, daß die oben verwandte Voraussetzung keine allgemeine Gültigkeit hat. Wir konstruieren uns einen Fall, in welchem sie nicht erfüllt ist. Es werde wie bei Rossby eine Schicht der Dicke dz durch eine solche gleicher Dicke ersetzt; und zwar vollziehe sich diese Advektion in der Höhe $z' < z$, so daß die von uns betrachtete Schicht bei z keiner advektiven Druckänderung ausgesetzt ist. Aus Gleichung (6) folgt, daß die Längenänderung einer Schicht der Dicke dz bei adiabatischer Kompression durch die zusätzliche Belastung $\delta\pi$ den Wert hat

$$\delta(dz) = d(\delta z) = -\frac{1}{\varkappa}\frac{\delta\pi}{p}dz.$$

Nun ist in unserem Falle $\delta\pi \neq 0$ für alle Schichten vom Boden bis z'. Das δz wird also zwischen Boden und z' von seinem ursprüng-

lichen Wert 0 bis zu einem bestimmten negativen Wert anwachsen, der sich, da $\delta\pi$ oberhalb z' nach Voraussetzung verschwindet und auch die Dicke der Schicht bei z' konstant geblieben ist, wiederum nach Gleichung (6) bis zur Höhe z (und darüber) konstant fortpflanzt. Es wird also die gesamte Luftsäule oberhalb z' als Ganzes um den Betrag $\delta' z$ absinken. Da aber die Luftsäule in Wirklichkeit gegen die Umgebung nicht abgeschlossen ist, wird — worauf bereits Rossby hinwies — wegen der dadurch in allen Schichten oberhalb z' auftretenden Druckverminderung ein Nachströmen von Luft von der Seite her erfolgen. Dieser Vorgang vergrößert δz weiter, es strömt noch mehr nach usw., bis schließlich einmal ein Endzustand eintritt. Die gesamte oberhalb z vor sich gegangene Massenzufuhr sei dann δM; die hierdurch erzeugte Kompression bedinge in z eine Verschiebung $\delta'' z$. Somit ergibt sich in diesem Falle für die gesamte Verschiebung der Wert $\delta' z + \delta'' z$. Würde man nun diese Massenzufuhr δM als einzige Massenzufuhr betrachten, d. h. wäre unterhalb z keine Advektion erfolgt, so würde daraus die Verschiebung $\delta'' z$ allein resultieren. Ob man also die betrachtete Luftsäule als von der Umgebung abgeschlossen betrachtet (unendlich hoher Schornstein) oder ob man seitliche Massenzufuhr als möglich ansieht, immer liefert die Advektion unterhalb z den Beitrag $\delta' z$. In diesem Falle darf man also nicht mit festgehaltener oberer Grenze der von der Advektion betroffenen Schicht rechnen.

Nun haben ja Ertel und Li beim zweiten Schritt des von ihnen behandelten Advektionsvorganges in der Schicht $z_1; z_1'$ eine advektive Dichteänderung $\delta_a \varrho$ vor sich gehen lassen und diese durch Volumenvergrößerung sich weiter verändern lassen; sie beziehen aber jedenfalls das $\delta_a \varrho$ auf eine noch nicht veränderte Schichtdicke $z_1; z_1'$, so daß derselbe Vorgang betrachtet wird, der oben untersucht wurde. Nach dem Ergebnis dieser Untersuchung wird dabei eine andere Volumenänderung auftreten, als sie Ertel und Li angaben, weil eben die obere Grenze der Schicht $z_1; z_1'$ ebenfalls verschoben wird. Formel (6) würde in diesem Falle sogar dieselbe Verschiebung für z_1 wie für z_1' ergeben, so daß keine weitere Dichteänderung entstehen kann.

Wir wollen nunmehr die spezielle Voraussetzung fallen lassen, unter welcher Formel (6) gilt, daß nämlich die eingeschobene Schicht dieselbe Dicke hat wie die durch sie ersetzte, und wollen auf einem anderen Wege die Frage nach einer weiteren Dichteänderung im Sinne des Ertel-Lischen Ansatzes $(\delta' \varrho - \delta_a \varrho)$ allgemein zu lösen suchen. Die eingeschobene Luftschicht stehe beim Einfließen unter demselben Druck p wie die ursprüngliche, was wohl meist der Fall ist, da sich in benachbarten Luftmassen wesentliche Druck-

unterschiede sofort ausgleichen würden; es haben auch alle bisherigen Advektionstheorien diese Annahme gemacht. Der Dichteunterschied der neuen gegen die alte Luftmasse sei $\delta_a \varrho$. Unter dem Einfluß der in den Schichten oberhalb der Höhe z vor sich gehenden Advektion, deren Druckäquivalent $\delta \pi$ sei, wird die betrachtete Schicht komprimiert und erleidet (Wärmezufuhr sei ausgeschlossen) eine adiabatische Dichteänderung $\delta \varrho = \varrho \frac{\delta \pi}{\varkappa p}$. Es herrscht also die neue Dichte $\varrho_1 = \varrho + \delta_a \varrho + \delta \varrho$ bei einem Druck von $p_1 = p + \delta \pi$, womit auch die Temperatur nach der Zustandsgleichung gegeben ist. Nun besteht ja in einer Luftsäule Gleichgewicht, wenn die durch T und ϱ bestimmte innere Spannkraft p' mit dem durch das Gewicht der darüber lagernden Luftmassen erzeugten Druck p übereinstimmt. Dieser Zustand herrscht nach Voraussetzung in der eingeschobenen Luftschicht ($\varrho + \delta_a \varrho$, $T + \delta_a T$, $p' = p$). Die adiabatische Kompression führt zu einem Endzustand, in welchem ebenfalls die durch $\varrho_1 = \varrho + \delta_a \varrho + \delta \varrho$ und $T_1 = T + \delta_a T + \delta T$ $\left(\delta T = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} T \frac{\delta \pi}{p}\right)$ bestimmte Spannkraft p_1' dem Druck $p_1 = p + \delta \pi$ das Gleichgewicht hält.

Kann nun eine weitere Dichteänderung $\delta'' \varrho$ unter Beibehaltung der Voraussetzung des Fehlens einer Wärmezufuhr vor sich gehen, die, abgesehen von der durch die adiabatische Kompression infolge der Belastung mit $\delta \pi$ auftretende Änderung $\delta \varrho$, die ursprünglich vorhandene Änderung $\delta_a \varrho$ in $\delta' \varrho = \delta_a \varrho + \delta'' \varrho$ verändert? Offenbar ist dies unmöglich, da nämlich bei rein adiabatischen Vorgängen in einer einmal gegebenen Luftmasse mit der Spannkraft stets sowohl die Dichte als auch die Temperatur e i n d e u t i g festgelegt sind, und somit zu dem gegebenen $p_1 = p + \delta \pi$ a l l e i n diejenige Dichte ϱ_1 die zum Gleichgewicht notwendige Spannkraft p_1' liefert, welche durch die oben abgeleitete Größe $\varrho_1 = \varrho + \delta_a \varrho + \delta \varrho$ gegeben ist. Sollte dagegen durch irgendeine Ursache eine Volumenveränderung verursacht werden, so wird mit der entstehenden Dichteänderung $\delta'' \varrho$ infolge der adiabatisch erfolgenden Ausdehnung oder Kompression (Luftpumpe!) eine Änderung der inneren Spannkraft um $\delta'' p = \varkappa p \frac{\delta'' \varrho}{\varrho}$ $\left(\text{entsprechende Temperaturänderung ist } \delta'' T = (\varkappa - 1) T \frac{\delta'' \varrho}{\varrho}\right)$ verknüpft sein, durch welche das Gleichgewicht mit dem konstant gebliebenen äußeren Druck gestört würde, so daß die Grenzflächen der betrachteten Schicht infolge der auftretenden Beschleunigungen so lange verschoben würden, bis damit die alte Spannkraft p_1' und

somit auch die alte Dichte $\varrho_1 = \varrho + \delta_a \varrho + \delta \varrho$ wiederhergestellt sind.

Aus diesen Überlegungen geht als wichtigste Tatsache hervor, daß im Falle statischen Gleichgewichts die nicht durch die Belastungsänderung $\delta\pi$ hervorgerufene Dichteänderung allein die advektive Dichteänderung sein kann. Aus diesem Grunde kann entsprechend unserer früheren Überlegung im allgemeinen das δz nicht unabhängig von der Advektion unterhalb z sein, u. a. auch nicht in dem von Ertel und Li untersuchten Fall.

Es gibt einen einzigen Fall, in welchem δz trotz Advektion unterhalb des betrachteten Niveaus verschwindet und wobei natürlich das $\delta_a \varrho$ ebenfalls erhalten*) bleibt; das ist der Sonderfall, bei dem die in $z_1 < z$ eingeschobene Schicht gegenüber der ursprünglichen gerade um soviel dicker ist, als die durch das Einfließen verursachte Kompression der Luftsäule unterhalb z_1 ausmacht. Dieser Vorgang findet statt, wenn ein vom Boden bis in eine gewisse Höhe reichende Luftsäule als Ganzes an die Stelle einer anderen tritt. Als Beispiel wählen wir einen Einbruch kalter Luft, der bis in die Höhe z_1 reicht. Der Druck möge in dieser Höhe in beiden Luftsäulen derselbe sein, so daß er am Boden in der neuen, kalten Luftmasse wesentlich höher ist als in der ursprünglichen. Das würde unserer Voraussetzung widersprechen, daß jeweils die einfließende Luft unter demselben Druck steht wie die durch sie ersetzte. Wir wollen diese Voraussetzung aber beibehalten und müssen daher darauf verzichten, die gesamte kalte Luft auf einmal einströmen zu lassen, und statt dessen fordern, daß die Advektion nacheinander in den verschiedenen Schichten erfolgt, etwa indem sie die Form eines flachen Keiles hat und somit am Boden zuerst einströmt (Figur 2); zuströmende kalte und abströmende warme Luft mögen dabei gleiche Geschwindigkeit haben. Die sich zu einem späteren Augenblick in der Höhe einschiebenden Luftschichten sind dann jeweils um soviel dicker, als die Kompression (Verlauf der gestrichelten Linien in Figur 2) der darunter lagernden vorher eingeflossenen kalten Luftmassen ausmacht, so daß die warme Luft darüber nirgends zum Absinken kommt.

Unsere thermodynamischen Überlegungen haben uns also zu der Auffassung geführt, daß eine Dichteänderung außer der adiabatischen von der Größe $\varrho \dfrac{\delta\pi}{\varkappa p}$ innerhalb der neuen Luftmasse nicht mehr stattfinden kann, so daß also die von Ertel und Li mit $\delta' \varrho$ bezeichnete

*) Immer abgesehen von der adiabatischen Änderung infolge der Zusatzbelastung $\delta\pi$.

nichtadiabatische Dichteänderung genau mit $\delta_a \varrho$ übereinstimmen muß. Würde man aber in Gleichung (19) diesen Wert statt des von Ertel

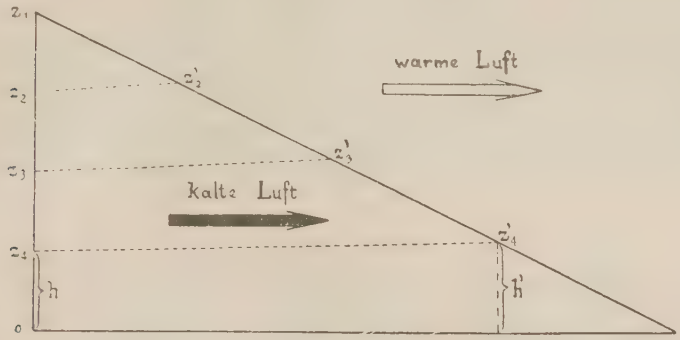

Fig. 2.

und Li benutzten $\left(\frac{\delta p}{\delta \pi} \delta_a \varrho\right)$ einsetzen, so würde man gerade die Rossbysche verallgemeinerte Theorie erhalten. Wir werden also einen anderen Weg zur Verbesserung der Rossbyschen Theorie einschlagen müssen.

VIII. Bemerkungen zu zwei Arbeiten von Thomas[15)16)].

Es soll an dieser Stelle ganz kurz auf zwei Arbeiten von Thomas eingegangen werden, die sich auch mit dem Advektionsproblem befassen. Es werden von Thomas zwei spezielle Fälle untersucht. Das Ergebnis ist wiederum die Erkenntnis, daß es Fälle gibt, wo die Stratosphäre allein der Ausgangspunkt von großen Druckänderungen ist und die Troposphäre sich passiv verhält. — Bei dem ersten der Beispiele (einem Druckanstieg von 35 mm) wird zunächst eine Methode verwandt, die darauf basiert, daß zufällig in 14 bis 15 km Höhe ein Niveau existiert, in welchem keine lokale Druckänderung aufgetreten ist. Es muß dann nämlich in diesem Falle die gesamte Massenzufuhr innerhalb der Schichten vom Boden bis 15 km Höhe stecken, wobei aber noch nicht gesagt ist, ob diese Massenzufuhr auch allein aus diesen Schichten stammt. Nimmt man an, daß die Troposphäre keinerlei Beitrag geliefert hat, also nur einer adiabatischen Kompression ausgesetzt worden ist, so ergeben sich Werte der Temperatur- und Druckänderungen, die sehr gut mit den beobachteten überein-

stimmen, so daß man zu jener Annahme wohl berechtigt ist. Thomas behandelt dann dieses Beispiel noch einmal mit einer Methode, die der Ertel-Lischen Theorie sehr ähnlich ist, wobei er ebenfalls die Annahme macht, daß δz nur von der Advektion oberhalb z abhängt, daß es also jeweils proportional dem zugehörigen $\delta\pi$ ist (wobei natürlich der Proportionalitätsfaktor mit der Höhe veränderlich ist). Er muß dann annehmen, daß die gesamte Massenzufuhr innerhalb der Schichten von etwa 8 bis 15 km erfolgt ist. Er nimmt daher eine „zusätzliche" Advektion δM an (Figur 3), die die Lücke

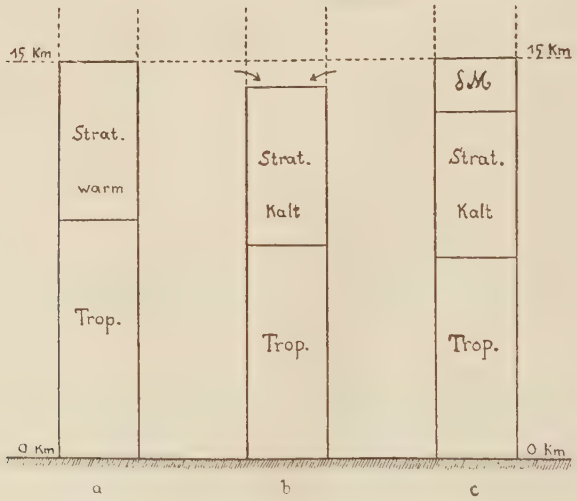

Fig. 3.

zwischen den durch die Kompression der Troposphäre abgesunkenen, ursprünglich in 15 km Höhe befindlichen Luftmassen und dem wegen $\delta\pi_{15} = 0$ festgehaltenen 15-km-Niveau ausfüllt und mit ihrem vollen Gewicht wirkt. Nach den weiter oben gegebenen Überlegungen wird aber in Wirklichkeit die obere Säule nachsinken, worauf auch in den Schichten oberhalb 15 km durch die Druckverminderung hervorgerufene „zusätzliche" Advektion eintritt, während durch diejenige zwischen 8 und 15 km somit nur ein gewisser Anteil des ursprünglichen Defizits ersetzt zu werden braucht. — Strömt dabei oben genügend Luft nach, so kann sehr wohl nach der zunächst durch das Absinken erzeugten Druckverminderung der ursprüngliche Druck in

15 km Höhe wieder hergestellt werden, und zwar trotz — oder vielmehr gerade wegen — der oberhalb vor sich gegangenen Massenzufuhr; $\delta p_{15} = 0$ erfordert nämlich geradezu $\delta \pi_{15} > 0$. — Der zweite Fall, ein stratosphärisch bedingter Druckfall, wird schließlich bei entsprechenden Ergebnissen mit derselben Methode behandelt.

Die wichtige Tatsache, daß die Troposphäre in diesen beiden Fällen nur ein passives Verhalten zeigte, geht aus den Untersuchungen von Thomas einwandfrei hervor; daran kann auch die notwendige Korrektur der Verteilung der Massenzufuhr oberhalb 8 km nichts mehr ändern.

IX. Die Grundlagen einer neuen Advektionstheorie.

Es ist bereits an früherer Stelle angedeutet worden, daß es das Naheliegendste bei einem Versagen der Rossbyschen Theorie gewesen wäre, diejenige Voraussetzung einer Prüfung zu unterziehen, die einer Anwendung dieser Theorie auf allgemeine Mittelwerte zugrunde lag, nämlich, daß beide Anteile der Advektion, also „auslösende" und „zusätzliche" im Sinne Rossbys, die gleichen physikalischen Eigenschaften haben. Es wird im folgenden gezeigt werden, daß diese Voraussetzung unzulässig war.

Als Ertel und Li ihre neue Advektionstheorie aufstellten, gingen sie von dem Mangel der Rossbyschen Theorie aus. Eine solche Methode ist an sich zweifellos brauchbar, und sie soll an dieser Stelle wiederum angewandt werden. Allerdings wird das Mangelhafte der Theorie anders formuliert werden müssen, als es Ertel und Li taten. Sie sahen ja den Mangel darin, daß das $\delta \pi$ mit der Höhe zu langsam abnahm. Wenn aber — der Fall wäre ja denkbar — δp bis in große Höhen hinauf verhältnismäßig groß bleibt, dann wäre nicht einzusehen, weshalb $\delta \pi$ abnehmen sollte; vielmehr kann man dies nur erwarten, wenn auch $\delta \pi$ entsprechend abnimmt. Der Zusammenhang zwischen $\delta \pi$ und z ist erst ein abgeleiteter; nur weil δp im allgemeinen mit der Höhe rasch abnimmt, kann man dies im allgemeinen auch von $\delta \pi$ verlangen. Die ursprünlichere Forderung ist aber die, daß der Unterschied zwischen $\delta \pi$ und δp, und damit das δz, nicht allzu groß wird. Das Problem, das jetzt zur Diskussion steht, ist hiermit klar vorgegeben; es handelt sich um die Frage, ob die „zusätzliche" Advektion anders auf das Zustandekommen des δz wirkt als die „auslösende".

Gegeben sei ein Volumen V, in welchem sich Luft von der Dichte ϱ befindet. Das Volumen gehöre einer Luftsäule vom Quer-

schnitt 1 an und habe die Höhe h, so daß gilt: $V = 1 \cdot h$. Die Masse, die sich in dem betrachteten Volumen befindet, ist dann:

$$M = \varrho h. \tag{25}$$

Ändert sich die Masse um die kleine Größe δM, so hängen die entsprechenden Änderungen von ϱ und h mit δM folgendermaßen zusammen (bei unverändertem Druck p):

$$\delta M = h\,\delta\varrho + \varrho\,\delta h. \tag{26}$$

Eine Massenzufuhr ruft somit im allgemeinen sowohl eine Änderung von ϱ als auch eine solche von h hervor. Rossbys spezielle Annahme war die, daß δh verschwindet. Es wird dann das Volumen von der Dichte ϱ durch ein gleich großes von der Dichte $\varrho + \delta\varrho$ ersetzt (Advektion anders temperierter Luft im ersten Schritt des Advektionsvorganges, wo ϱ und h noch nicht durch $\delta\pi$ verändert werden). Wie (26) zeigt, kann eine weitere Massenzufuhr darin bestehen, daß sich eine Schicht von der Dicke δh und der Dichte ϱ (oder $\varrho + \delta\varrho$) über das ursprüngliche Volumen herüberlagert (oder, was dasselbe ist, sich beliebig oft geteilt an entsprechend vielen Stellen in das Volumen einschiebt), ohne eine bisher vorhandene Schicht dafür aus der Säule herauszudrängen. Das ist genau die Eigenschaft der durch „zusätzliche" Advektion einfließenden Luft, denn diese strömt ein, weil ein Druckdefizit aufgetreten ist, sie ersetzt also nicht andere Luft, sondern schiebt sich zwischen die vorhandene ein*); und sie kann schon deshalb nicht dem Glied $h\,\delta\varrho$ angehören, weil sie (bei genügend kleinem h, bzw. δh) weder Druck noch Temperatur verändert und daher ebensowenig die Dichte. Es sind also wohl Fälle möglich, wo bei der Advektion nicht-adiabatische Volumenänderungen auftreten, aber diese werden dann — und das ist der entscheidende Gegensatz zu der Ertel-Lischen Auffassung — durch Massenzufuhren bei keiner neuerlichen Dichteänderung hervorgerufen. Advektive Massenzufuhr wird somit im allgemeinen sowohl die Dichte von ϱ auf $\varrho + \delta_a\varrho$ als auch die Schichtdicke von h auf $h + \delta h$ (von der adiabatischen Kompression noch abgesehen) ändern, so daß die gesamte Massenzufuhr geschrieben werden kann

$$\delta M = h\,\delta_a\varrho + \varrho\,\delta h$$

(als Faktor bei δh kann $\delta_a\varrho$ vernachlässigt werden), wobei $h\,\delta_a\varrho$

*) Das Einschieben, und damit das Höherschieben der darüberliegenden Luftsäule, geht so lange vor sich, bis soviel Masse über dem betreffenden Niveau liegt, daß der resultierende Druck dem der Umgebung gleich ist. Das Entsprechende gilt für das Abströmen.

der „auslösenden“ (thermisch bedingten) und $\varrho\,\delta h$ der „zusätzlichen“ (dynamisch bedingten) Advektion entspricht.

Wie bereits erwähnt, ist das $\delta_a \varrho$ mit der advektiven Temperaturänderung gegeben; die durch δh gegebene Massenzufuhr dagegen ist eine Größe, die abhängt von der Druckverteilung in der betreffenden Höhe, zum Teil also auch vom entstehenden δp, aber ebenso vom Verhalten der Umgebung, es ist abhängig von der seit Beginn des Vorganges verstrichenen Zeit — je mehr Zeit vergangen ist, um so weiter werden sich aufgetretene Druckdifferenzen ausgeglichen haben —, und es ist schließlich abhängig von der Reibung, welche ja die Größe der Einströmungskomponente in ein Tief bestimmt. Hieraus folgt die völlige Unabhängigkeit der beiden Anteile $\delta \pi_a$ und $\delta \pi_z$ (von „auslösend“ und „zusätzlich“) der Advektion; und es liegt hierin die Hauptschwierigkeit, die sich der Aufstellung einer neuen Advektionstheorie in den Weg stellt.

Es ist am Anfang dieser Arbeit darauf hingewiesen worden, daß man, falls es gelingt, δz direkt oder höchstens unter Zuhilfenahme von δp mit $\delta \pi$ in Verbindung zu bringen, mit der beobachteten Funktion δp auskommt, um die Advektion zu bestimmen. Indem die bisherigen Theorien eine Wärmezufuhr ausschlossen, was man bei späterer Anwendung auf Mittelwerte wohl als berechtigt ansehen kann, war es ihnen mit den von ihnen benutzten Ansätzen gelungen, diese Verbindung herzustellen. Wir haben nun gezeigt, daß $\delta \pi$ in zwei unabhängige Bestandteile $\delta \pi_a$ und $\delta \pi_z$ zerfällt. Es ist daher unmöglich, mit Hilfe der einen gegebenen Funktion δp beide Bestandteile gesondert zu berechnen. Man kann auf diese Weise stets nur beide Bestandteile irgendwie kombiniert erhalten, in einfachen Fällen etwa ihre Summe, ihre Differenz, ihr Produkt o. ä., im allgemeinen bleibt aber solche Kombination derart kompliziert, daß ihre Bestimmung keinen praktischen Wert hat. Eine einzige Kombination wäre in unserem Falle brauchbar, nämlich die Summe beider Bestandteile; könnte man diese bestimmen, so würde man gerne auf eine Trennung verzichten. Wir hätten dann allerdings die Aufgabe, das δz wiederum mit gerade dieser Beziehung der beiden Anteile in Zusammenhang zu bringen. Das würde aber voraussetzen, daß beide Anteile in gleicher Weise das δz beeinflussen, und das ist, wie gezeigt wurde, nicht der Fall, da ja die „zusätzliche“ Advektion im Gegensatz zur „auslösenden“ noch ein δh erzeugt. Wir sind somit gezwungen, im Verlauf der Rechnung beide Anteile getrennt zu behandeln. Es läßt sich also die Gesamtadvektion niemals unter alleiniger Zugrundelegung der Beobachtungsfunktion δp bestimmen.

Man wird sich hier fragen, ob man nicht genau so wie früher

bei der Ausschaltung der Wärmezufuhr durch Mittelbildung es durch geeignete Zusammenfassung erreichen kann, daß ein Anteil der Advektion mit großer Wahrscheinlichkeit ausgeschaltet ist. Damals ging man so vor: Man ordnete nach der einen Funktion (Bodendruckänderung) und nahm an, daß die andere (Wärmezufuhr) dadurch nicht mitgeordnet wurde und ihre wahllos verstreuten Werte sich bei der Summierung weitgehend aufgehoben hätten. Hier ist es dagegen unmöglich, überhaupt nach einer Fuuktion zu ordnen, weil im Bodendruck stets beide in unbekanntem Verhältnis enthalten sind.

Wir müssen nunmehr folgendermaßen vorgehen: Wir stellen zunächst wie früher einen Zusammenhang zwischen δp und der Advektion auf, wobei wir uns darüber klar sein müssen, daß jetzt beide Anteile $\delta \pi_a$ und $\delta \pi_z$ darin enthalten sind und wir somit eine Gleichung mit zwei Unbekannten erhalten. Danach wäre dann zu versuchen, eine zweite Gleichung zwischen $\delta \pi_a$, $\delta \pi_z$ und δp herzustellen.

Wir hatten aber nun bereits früher gesehen, daß $\delta \pi_z$ von recht vielen Umständen abhängt, sodaß man zur Herstellung der zweiten Gleichung noch die Kenntnis einer Reihe weiterer Funktionen und deren Änderungen im verstrichenen Zeitraum benötigt. Eine wesentliche Rolle für den Betrag der zusätzlichen Advektion spielen z. B. Ort und Größe von Konvergenzen und Divergenzen der Luftströmung in den verschiedenen Höhen; deren einigermaßen genaue Bestimmung aber ist heutzutage noch kaum möglich. Man wird also in den meisten Fällen gezwungen sein, allerlei geeignete spezielle Annahmen zu machen, so daß als ständig gültige Grundlage für die Berechnung der Advektion nur die erste, mit Hilfe der statischen Grundgleichung und der Kenntnis des thermodynamischen Weges der Verschiebung abgeleitete Gleichung zwischen $\delta \pi_a$, $\delta \pi_z$ und δp dienen kann. Es ist also jetzt auch nicht mehr möglich, eine abgeschlossene Theorie zu geben, in deren Endformel nur noch die beobachteten Werte eingesetzt zu werden brauchen.

Es folgt nunmehr die Ableitung der neuen Grundformel der Advektionstheorie. Fig. 4 soll den Vorgang erläutern.

Die Schicht $z; z'$ (Fig. 4 a) werde infolge „auslösender" Advektion durch eine gleich hohe, aber schwerere Schicht ersetzt, die durch die Kompression der unteren Luftsäule bis $z_1; z_1'$ sinkt (Fig. 4 b). Nun setzt infolge der Druckverminderung oberhalb z_1 „zusätzliche" Advektion ein, die sich als dünne Schicht von der Dicke δh_2 über die ursprüngliche Schicht legt. Diese wird dadurch noch etwas weiter nach unten einsinken bis $z_2; z_2'$, während die neu entstandene obere Grenze der Schicht bei z_2'', und damit höher als z_1 liegt (Fig. 4 c).

Fig. 4 d zeigt den Zustand in einem späteren Zeitpunkt, wo die Höhe der sich überschiebenden Schicht auf δh_3 angewachsen ist.

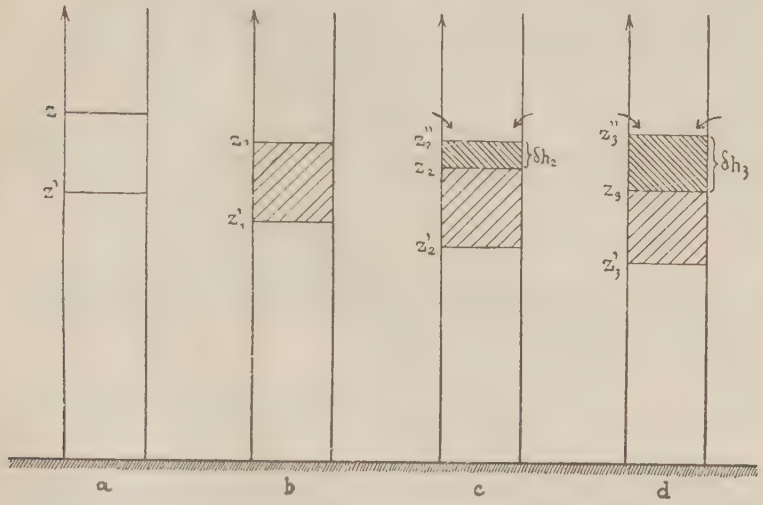

Fig. 4.

Das in einer bestimmten Höhe auftretende δz setzt sich jetzt aus zwei Anteilen zusammen. Der erste Teil, $\delta' z$ genannt, rührt von der Längenänderung aller zwischen Boden und der betrachteten Höhe z liegenden Schichten infolge der adiabatischen Kompression (oder Dilatation) her. Der zweite Teil, $\delta'' z$, ist gegeben durch die Summe der Höhen δh aller von der „zusätzlichen" Advektion herrührenden, zwischen Boden und z sich einschiebenden (bzw. herausgenommenen) Luftschichten. Man sieht, daß $\delta' z$ dasselbe ist wie die in der Rossbyschen allgemeinen Advektionstheorie auftretende Verschiebung, wenn man wie Ertel unter $\delta \pi$ die Summe beider Anteile versteht, daß aber das neu hinzukommende $\delta'' z$ im entgegengesetzten Sinne wirkt wie dieses $\delta' z$, sodaß das resultierende δz kleiner wird als in der Rossbyschen allgemeinen Theorie. Das ist aber gerade das, was zur Behebung des Mangels dieser Theorie als notwendig erkannt wurde.

Es werde jetzt eine Schicht der Dicke dz betrachtet. Der von ihr gelieferte Beitrag zu $\delta' z$ ist gemäß Formel (6)

$$d(\delta' z) = -\frac{\delta \pi_a + \delta \pi_z}{\varkappa p} dz. \tag{27}$$

Die zweite Veränderung der Schichtdicke ergibt sich aus der zugehörigen „zusätzlichen“ Massenzufuhr; deren Druckäquivalent ist $d\,\delta\pi_z$, das bedeutet pro Einheit der Grundfläche eine Masse von $-\frac{1}{g}d\,\delta\pi_z$, bei der Dichte ϱ also eine Schicht von der Höhe

$$\delta h = d(\delta'' z) = -\frac{1}{g\varrho}d\,\delta\pi_z. \tag{28}$$

Aus (27) und (28) ergibt sich die gesamte Längenänderung der Schicht zu

$$d(\delta z) = d(\delta' z + \delta'' z) = -\frac{\delta\pi_a + \delta\pi_z}{\varkappa p}dz - \frac{1}{g\varrho}d\,\delta\pi_z. \tag{29}$$

Für die Höhe z summieren sich alle Längenänderungen der Schichten zwischen Boden und z, und es wird

$$\delta z = -\int_0^z \left\{\frac{\delta\pi_a + \delta\pi_z}{\varkappa p} + \frac{1}{g\varrho}\frac{\partial\,\delta\pi_z}{\partial z}\right\}dz. \tag{30}$$

Nachdem hiermit die Größe δz auf einem mehr anschaulichen Wege abgeleitet wurde, soll an dieser Stelle auch eine mehr formale Herleitung ihren Platz finden. Es werde die Dicke h einer Luftschicht betrachtet. Sie ist gegeben, wenn die Masse m und die Dichte ϱ bekannt sind, vorausgesetzt, daß diese Schicht einer Luftsäule von gleichbleibender Grundfläche angehört. Da die Dichte wiederum sowohl von T als auch von p abhängt, so wird schließlich h eine Funktion von 3 Variablen:

$$h = h(m, T, p) = \frac{m R T}{p}. \tag{31}$$

Es werde nun h variiert:

$$\delta h = \frac{\partial h}{\partial m}\delta m + \frac{\partial h}{\partial T}\delta T + \frac{\partial h}{\partial p}\delta p. \tag{32}$$

Um die Werte der partiellen Ableitungen zu erhalten, differenzieren wir (31) in entsprechender Weise. Es wird

$$\frac{\partial h}{\partial m} = \frac{R T}{p}; \quad \frac{\partial h}{\partial T} = \frac{m R}{p}; \quad \frac{\partial h}{\partial p} = -\frac{m R T}{p^2}.$$

In (32) eingesetzt, ergibt das

$$\delta h = \frac{R T}{p}\delta m + \frac{m R}{p}\delta T - \frac{m R T}{p^2}\delta p. \tag{32a}$$

δp ist hierin eine individuelle Druckänderung, etwa hervorgerufen durch darüber stattfindende Massenzufuhr, die deshalb in Analogie zu der früheren Schreibweise $\delta \pi$ genannt werde. δT setzt sich zusammen aus demjenigen Anteil $\delta' T$, der durch die adiabatische Kompression infolge des $\delta \pi$ entsteht, und einem Anteil $\delta_a T$, der als advektive Temperaturänderung aufgefaßt werden kann, indem an die Stelle der ursprünglich vorhandenen Luft eine solche mit einem Temperaturunterschied $\delta_a T$ gegen diese tritt (wenn man beide beim ursprünglichen Druck miteinander vergleicht). δm schließlich ist die gesamte Massenänderung, die in der betrachteten Schicht auftritt, und ihr Druckäquivalent ist bei kleinem h gleich $-\frac{\partial \delta \pi}{\partial z} h$. Wir haben also folgende Substitutionen zu machen:

$$\delta m = -\frac{1}{g} \frac{\partial \delta \pi}{\partial z} h; \qquad \delta T = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} T \frac{\delta \pi}{p} + \delta_a T; \qquad \delta p = \delta \pi,$$

sowie nach (31)

$$m = \frac{h p}{R T}.$$

Es lautet dann (32a)

$$\delta h = -\frac{h}{g} \frac{\partial \delta \pi}{\partial z} \frac{R T}{p} + \frac{\varrho h R}{p} \delta_a T - \frac{\varrho h R T}{\varkappa p^2} \delta \pi \tag{33}$$

oder, mit Hilfe der Zustandsgleichung etwas umgeformt,

$$\delta h = -\frac{h}{g} \frac{\partial \delta \pi}{\partial z} \frac{1}{\varrho} + h \frac{\delta_a T}{T} - h \frac{\delta \pi}{\varkappa p}. \tag{33a}$$

Würde die Massenänderung allein darin bestehen, daß — bei unverändertem Druck p betrachtet — die ursprüngliche Schicht durch eine solche gleicher Dicke und um $\delta_a T$ veränderter Temperatur ersetzt wird, so hätten wir den Fall der Rossbyschen verallgemeinerten Theorie vor uns, und wir können den durch diesen Vorgang definierten Anteil der Advektion, der sich also mit $\delta_a T$ in Verbindung bringen läßt, als die „auslösende" Advektion im Sinne Rossbys bezeichnen. Der restliche Anteil der Advektion entsteht dann dadurch, daß sich auch die Dicken der Schichten — wiederum bei unverändertem Druck p betrachtet — ändern, und er werde „zusätzliche" Advektion genannt. Es ist mittels dieser Ableitung natürlich keine Aussage über das kausale Verhältnis der beiden Anteile möglich, und es mögen die Bezeichnungen „auslösend" und „zusätzlich" nicht in diesem Sinne mißverstanden werden; sie ergaben sich ja nur bei der

von Rossby gegebenen anschaulichen Betrachtung eines speziellen Vorganges. Man kann übrigens beide Advektionsanteile auch dadurch voneinander unterscheiden, daß der „auslösende" durch Ersetzen einer Schicht durch eine andere entsteht und durch die Dichte differenz in Erscheinung tritt, während der „zusätzliche" als Ganzes neu in die Luftsäule eintritt und somit durch seine volle Masse wirkt.

Wir ersetzen nun $\delta_a T$ durch den „auslösenden" Anteil der Advektion. Eine Temperaturänderung von $\delta_a T$ ergibt bei konstantem Druck die Dichteänderung

$$\delta_a \varrho = -\varrho \frac{\delta_a T}{T},$$

also, da auch die Höhe der Schicht erhalten bleiben soll, einen Massenzuwachs

$$\delta_a m = -\varrho \frac{\delta_a T}{T} h,$$

dessen Druckäquivalent der Änderung des „auslösenden" Anteils $\delta \pi_a$ der advektiven Druckänderung innerhalb der Schicht entspricht, sodaß man schreiben kann (bei kleinem h):

$$-\frac{1}{g} \frac{\partial \delta \pi_a}{\partial z} h = \delta_a m = -\varrho \frac{\delta_a T}{T} h.$$

Setzt man diesen Ausdruck in (33a) ein, so erhält man:

$$\delta h = -\left\{ \frac{1}{g\varrho} \left[\frac{\partial \delta \pi}{\partial z} - \frac{\partial \delta \pi_a}{\partial z} \right] + \frac{\delta \pi}{\varkappa p} \right\} h. \tag{34}$$

Betrachtet man nunmehr eine Schicht von der Dicke dz und schreibt man für $\delta \pi - \delta \pi_a$ die „zusätzliche" advektive Druckänderung $\delta \pi_z$, so ergibt sich

$$\delta (dz) = d(\delta z) = -\left\{ \frac{\delta \pi_a + \delta \pi_z}{\varkappa p} + \frac{1}{g\varrho} \frac{\partial \delta \pi_z}{\partial z} \right\} dz, \tag{34a}$$

woraus man wieder die Gleichung (30) erhält:

$$\delta z = -\int_0^z \left\{ \frac{\delta \pi_a + \delta \pi_z}{\varkappa p} + \frac{1}{g\varrho} \frac{\partial \delta \pi_z}{\partial z} \right\} dz. \tag{30}$$

Mit Formel (1) ergibt (30) dann die Beziehung

$$\delta \pi_a + \delta \pi_z = \delta p + g\varrho \int_0^z \left\{ \frac{\delta \pi_a + \delta \pi_z}{\varkappa p} + \frac{1}{g\varrho} \frac{\partial \delta \pi_z}{\partial z} \right\} dz. \tag{35}$$

Diese Gleichung ist die neue Grundformel der Advektionstheorie und zwar für den Fall, daß keine Wärmezufuhr stattfindet.

Ertel und Li haben am Schlusse ihrer Arbeit ihre Grundformel durch die Annahme einer Wärmezufuhr erweitert. Der Vollständigkeit halber sei auch hier die entsprechende Erweiterung der Grundformel gegeben.

Da alle Änderungen klein sein sollen, ebenso die Wärmezufuhr, so kann man diese wieder als einen gesonderten Schritt betrachten, der nach vollzogener Advektion vorgenommen wird. Es findet dann die Wärmezufuhr bei konstantem Druck statt. Pro Masseneinheit möge die Wärmemenge δq zugeführt werden. Daraus resultiert die Temperaturänderung $\delta_w T = \frac{\delta q}{c_p}$. Bei konstantem Druck ergibt das die Dichteänderung

$$\delta_w \varrho = -\frac{\varrho}{T}\,\delta_w T = -\varrho\,\frac{\delta q}{c_p T}.$$

Dadurch wird die betrachtete Schicht der Dicke dz weiter verlängert um

$$\delta'''(dz) = d(\delta''' z) = -\frac{\delta_w \varrho}{\varrho}\,dz = \frac{\delta q}{c_p T}\,dz. \tag{37}$$

Hieraus ergibt sich unter Verwendung von (29) für die gesamte Dickenänderung der Schicht:

$$\left\{\begin{array}{l} d(\delta z) = d(\delta' z + \delta'' z + \delta''' z) = \\ \qquad -\dfrac{\delta \pi_a + \delta \pi_z}{\varkappa p}\,dz - \dfrac{1}{g\varrho}\,d\,\delta \pi_z + \dfrac{\delta q}{c_p T}\,dz. \end{array}\right. \tag{38}$$

In der Höhe z tritt damit die Verschiebung

$$\delta z = -\int_0^z \left\{\frac{\delta \pi_a + \delta \pi_z}{\varkappa p} + \frac{1}{g\varrho}\,\frac{\partial\,\delta \pi_z}{\partial z} - \frac{\delta q}{c_p T}\right\} dz \tag{39}$$

auf. Unter Berücksichtigung von Formel (1) erhält man schließlich die erweiterte Grundformel:

$$\delta \pi_a + \delta \pi_z = \delta p + g\varrho \int_0^z \left\{\frac{\delta \pi_a + \delta \pi_z}{\varkappa p} + \frac{1}{g\varrho}\,\frac{\partial\,\delta \pi_z}{\partial z} - \frac{\delta q}{c_p T}\right\} dz. \tag{40}$$

X. Einige Anwendungen der neuen Grundformel.

Wie bereits angedeutet, ist es nunmehr notwendig, durch geeignete spezielle Annahmen eine zweite Verbindung zwischen $\delta\pi_a$, $\delta\pi_z$ und den aerologisch erfaßbaren Funktionen herzustellen. Es sollen hier drei solcher Möglichkeiten behandelt werden.

Es sei im ersten Fall eine Beziehung zwischen $\delta\pi_a$ und $\delta\pi_z$ bekannt, und zwar derart, daß für jede Schicht der Anteil der „auslösenden" Advektion an der Gesamtadvektion durch

$$\nu = \frac{\delta\pi_a}{\delta\pi_a + \delta\pi_z} \tag{41}$$

gegeben ist. Ist $\nu = 1$, so liegt der Rossbysche Fall vor; ist $\nu = 0$, so ist überhaupt nur „zusätzliche" Advektion vorhanden, d. h. auffüllende oder abbauende Massenänderung (beim Tief, bzw. beim Hoch), die sehr wohl für sich auftreten kann, wenn nämlich der erste Aufstieg erst nach Vollzug der „auslösenden" Advektion stattgefunden hat, so daß die im Zeitintervall bis zum zweiten Aufstieg vor sich gehende Massenzufuhr nur die dynamisch bedingte „zusätzliche" ist.

Der Fall $\nu = 0$ muß gesondert behandelt werden; zunächst sei $0 < \nu \leqq 1$. Bezeichnet man mit $\delta\pi$ die Summe beider Anteile, so geht die Grundformel (35) über in

$$\delta\pi = \delta p + g\varrho \int_0^z \left\{ \frac{\delta\pi}{\varkappa p} + \frac{1}{g\varrho}\frac{\partial}{\partial z}\left[(1-\nu)\,\delta\pi\right] \right\} dz. \tag{42}$$

Nach Division durch $g\varrho$ und Differentiation erhält man

$$\frac{1}{g\varrho}\frac{\partial}{\partial z}[\delta\pi - \delta p] - \frac{1}{g\varrho^2}\frac{\partial\varrho}{\partial z}[\delta\pi - \delta p] = \frac{\delta\pi}{\varkappa p} + \frac{1}{g\varrho}(1-\nu)\frac{\partial\,\delta\pi}{\partial z} - \frac{1}{g\varrho}\delta\pi\frac{\partial\nu}{\partial z}.$$

Multipliziert man nunmehr wieder mit $g\varrho$ und faßt auf der rechten Seite alle $\delta\pi$ mit den entsprechenden δp zusammen, so ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial z}[\delta\pi - \delta p] - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial\varrho}{\partial z}[\delta\pi - \delta p] = \frac{g\varrho}{\varkappa p}[\delta\pi - \delta p] + \frac{g\varrho}{\varkappa p}\delta p + (1-\nu)\frac{\partial}{\partial z}[\delta\pi - \delta p] + (1-\nu)\frac{\partial\,\delta p}{\partial z} - \frac{\partial\nu}{\partial z}[\delta\pi - \delta p] - \frac{\partial\nu}{\partial z}\delta p$$

oder, da $g\varrho = -\dfrac{\partial p}{\partial z}$,

$$(43)\quad \left\{ \begin{aligned} & \nu \frac{\partial}{\partial z}[\delta\pi - \delta p] + [\delta\pi - \delta p] \frac{\partial}{\partial z}\left\{\ln \frac{p^{\frac{1}{\varkappa}}}{\varrho}\right\} + \frac{\partial \nu}{\partial z}[\delta\pi - \delta p] \\ & \qquad = \frac{g\varrho}{\varkappa p}\delta p + (1-\nu)\frac{\partial \delta p}{\partial z} - \delta p \frac{\partial \nu}{\partial z}. \end{aligned} \right.$$

Faßt man nunmehr das erste und dritte Glied der linken Seite zusammen, so erhält man

$$(44)\quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z}[\nu(\delta\pi - \delta p)] + \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial z}\left\{\ln \frac{p^{\frac{1}{\varkappa}}}{\varrho}\right\} \cdot [\nu(\delta\pi - \delta p)] \\ & \qquad = \frac{g\varrho}{\varkappa p}\delta p + \frac{\partial}{\partial z}[(1-\nu)\delta p]. \end{aligned} \right.$$

Diese Gleichung läßt sich integrieren, und es wird

$$(45)\quad \left\{ \begin{aligned} \nu(\delta\pi - \delta p) = e^{-\int_0^z \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial z}\left\{\ln \frac{p^{\frac{1}{\varkappa}}}{\varrho}\right\} dz} \int_0 e^{\int_0^z \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial z}\left\{\ln \frac{p^{\frac{1}{\varkappa}}}{\varrho}\right\} dz} \Big\{ & \frac{g\varrho}{\varkappa p}\delta p \\ & + \frac{\partial}{\partial z}[(1-\nu)\delta p]\Big\} dz. \end{aligned} \right.$$

Nun ist

$$\frac{p^{\frac{1}{\varkappa}}}{\varrho} = R\,T p^{\frac{1}{\varkappa}-1} = R p_0^{\frac{1}{\varkappa}-1}\vartheta,$$

wobei ϑ die potentielle Temperatur ist. — Beim Logarithmieren liefert $R \cdot p_0^{\frac{1}{\varkappa}-1}$ einen konstanten Summanden, der bei der Differentiation wegfällt, so daß man schließlich schreiben kann:

$$(46)\quad \left\{ \begin{aligned} \delta\pi = \delta p + \frac{1}{\nu} \cdot e^{-\int_0^z \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial z}\{\ln\vartheta\} dz} \int_0 e^{\int_0^z \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial z}\{\ln\vartheta\} dz} \Big\{ & \frac{g\varrho}{\varkappa p}\delta p \\ & + \frac{\partial}{\partial z}[(1-\nu)\delta p]\Big\} dz. \end{aligned} \right.$$

Wir wollen nun annehmen, daß ν konstant sei, um dann für verschiedene ν-Werte die erhaltene Endformel auf die Schedlerschen

Mittelwerte anzuwenden. Bei konstantem ν läßt sich das Integral in der e-Potenz auswerten, und es wird

$$\delta\pi = \delta p + \frac{1}{\nu}\,\vartheta^{-\frac{1}{\nu}} \int_0^z \vartheta^{\frac{1}{\nu}} \left\{ \frac{g}{\varkappa R}\,\frac{\delta p}{T} + (1-\nu)\,\frac{\partial\,\delta p}{\partial z} \right\} dz. \tag{47}$$

Ist $\nu = 0$, so ergibt sich aus (42)

$$\delta\pi = \delta p + g\varrho \int_0^z \left\{ \frac{\delta\pi}{\varkappa p} + \frac{1}{g\varrho}\,\frac{\partial\,\delta\pi}{\partial z} \right\} dz. \tag{48}$$

Dividiert man wieder durch $g\varrho$ und differenziert man, so erhält man

$$\frac{1}{g\varrho}\,\frac{\partial\,\delta\pi}{\partial z} - \frac{1}{g\varrho}\,\frac{\partial\,\delta p}{\partial z} - \frac{1}{g\varrho^2}\,\frac{\partial\varrho}{\partial z}\,(\delta\pi - \delta p) = \frac{\delta\pi}{\varkappa p} + \frac{1}{g\varrho}\,\frac{\partial\,\delta\pi}{\partial z}.$$

In diesem Falle hebt sich die Ableitung von $\delta\pi$ auf, und es entsteht nach Multiplikation mit $g\varrho$ die Gleichung

$$-\frac{1}{\varrho}\,\frac{\partial\varrho}{\partial z}\,(\delta\pi - \delta p) = \frac{g\varrho}{\varkappa p}\,(\delta\pi - \delta p) + \frac{g\varrho}{\varkappa p}\,\delta p + \frac{\partial\,\delta p}{\partial z}. \tag{49}$$

Nun folgt aus der Differentiation der Zustandsgleichung

$$-\frac{1}{\varrho}\,\frac{\partial\varrho}{\partial z} = -\frac{1}{p}\,\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{T}\,\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{g\varrho}{p} + \frac{1}{T}\,\frac{\partial T}{\partial z},$$

so daß (49) übergeht in

$$(\delta\pi - \delta p)\left[\frac{g\varrho}{p} + \frac{1}{T}\,\frac{\partial T}{\partial z} - \frac{g\varrho}{\varkappa p}\right] = \frac{g\varrho}{\varkappa p}\,\delta p + \frac{\partial\,\delta p}{\partial z} \tag{50}$$

oder

$$(\delta\pi - \delta p)\left[\frac{g}{R}\,\frac{1}{T}\,\frac{\varkappa - 1}{\varkappa} + \frac{1}{T}\,\frac{\partial T}{\partial z}\right] = \frac{g}{\varkappa R}\,\frac{1}{T}\,\delta p + \frac{\partial\,\delta p}{\partial z}. \tag{50 a}$$

Hieraus folgt endlich

$$\delta\pi = \delta p + \frac{\dfrac{g}{\varkappa R}\,\dfrac{1}{T}\,\delta p + \dfrac{\partial\,\delta p}{\partial z}}{\dfrac{g}{R}\,\dfrac{1}{T}\,\dfrac{\varkappa - 1}{\varkappa} + \dfrac{1}{T}\,\dfrac{\partial T}{\partial z}} = \frac{\dfrac{\delta p}{\varkappa} + \dfrac{R}{g}\,T\,\dfrac{\partial\,\delta p}{\partial z}}{\dfrac{\varkappa - 1}{\varkappa} + \dfrac{R}{g}\,\dfrac{\partial T}{\partial z}} + \delta p$$

oder auch

$$\delta\pi = \frac{\delta p + \dfrac{R}{g}\,\dfrac{\partial}{\partial z}\{T\,\delta p\}}{\dfrac{\varkappa - 1}{\varkappa} + \dfrac{R}{g}\,\dfrac{\partial T}{\partial z}} = \frac{\delta p\left(1 + \dfrac{R}{g}\,\dfrac{\partial T}{\partial z}\right) + \dfrac{R}{g}\,T\,\dfrac{\partial\,\delta p}{\partial z}}{\left(1 + \dfrac{R}{g}\,\dfrac{\partial T}{\partial z}\right) + \dfrac{1}{\varkappa}}. \tag{51}$$

In Tabelle 3 sind nun die sich aus den Schedlerschen Mittelwerten für $\nu = 1{,}0,\ 0{,}8,\ 0.5,\ 0{,}2$ und $0{,}0$ ergebenden $\Delta_{1000}\,\delta\pi$ sowie die in 14 km Höhe bleibenden Restglieder des $\delta\pi$ (absolut und in Prozenten der Bodendruckänderung) zusammengestellt. Man sieht, daß für ν-Werte zwischen 1,0 und 0,5 die beiden Maxima der advektiven Massenzufuhr erhalten bleiben, und zwar liefert $\nu = 0{,}5$ die kleinsten Restglieder des $\delta\pi$. Wenn man also ein mittleres Verhältnis der beiden Advektionsanteile von 1 : 1 annimmt, so erhält man ein Ergebnis, welches allen Erwartungen an eine neue Theorie voll entspricht. Dabei ist noch zu bedenken, daß die Konstanz von ν eine sehr spezielle Voraussetzung ist; im allgemeinen wird ν in den oberen Troposphärenschichten ein Minimum haben, weil dort der meridionale Temperaturgradient und damit die Gelegenheit zu thermischer Advektion am kleinsten ist. Durch alle bisherigen Theorien hindurch haben sich jedoch die beiden Maxima der Advektion erhalten, welche speziellen Annahmen auch immer gemacht wurden (auch für ν-Werte unter 0,5 sind sie erkennbar); dies kann man wohl mit Recht als einen Beweis für ihre wirkliche Existenz bezeichnen, der auch durch eine unter Verzicht auf alle einschränkenden und vereinfachenden Annahmen hergeleitete komplizierte Theorie nicht mehr widerlegt werden würde.

Nimmt ν Werte um 0,2 oder darunter an, so verändert sich allmählich der Verlauf der $\Delta_{1000}\,\delta\pi$, so daß schließlich bei $\nu = 0{,}0$ eine Ähnlichkeit mit demjenigen bei Werten von 0,5 ab aufwärts kaum mehr vorhanden ist. Bei positiver Bodendruckänderung z. B. liefern bei $\nu = 0{,}0$ beinahe alle Schichten einen sogar recht erheblichen, negativen Anteil, nur drei Tausendmeterschichten ergeben positive Beiträge, die durch noch größere absolute Werte die Massenverluste in allen anderen Schichten überkompensieren. Bemerkenswert aber ist, daß diese drei positiven Werte auf diejenigen Höhen verteilt sind, in denen bei den größeren ν-Werten die Maxima der advektiven Massenzufuhr liegen. Die Zahlenwerte selbst weisen allerdings darauf hin, daß die verwandten Mittelwerte keineswegs auf eine Weise zustandegekommen sind, die einem ν unterhalb 0,2 entspricht. Im allgemeinen würde bei $\nu < 0{,}2$ wohl ein ganz anderer Verlauf der gemessenen δp auftreten, während die wirklich beobachteten Werte sich nur unter größtem Zwang in eine einem solchen ν entsprechende Verteilung einordnen lassen. Es ist ja auch nach Rossby in denjenigen Fällen, in welchen durch die Messung der vollständige Advektionsvorgang erfaßt wird, die „zusätzliche“ Advektion höchstens gleich dem 2,5fachen der „auslösenden“, das mittlere ν also nicht kleiner als 0,3; in den weitaus meisten Fällen jedoch wird der Wert 2,5 nicht einmal erreicht werden, da innerhalb eines Tages kaum

Tabelle 3.

$\delta p_0 = +7{,}04\ mb$

$\triangle z$ km	$\triangle_{1000}\,\delta\pi = mb$				
	$\nu = 1{,}0$	$\nu = 0{,}8$	$\nu = 0{,}5$	$\nu = 0{,}2$	$\nu = 0{,}0$
0— 1	+ 0,47	+ 0,54	+ 0,84	+ 2,03	+ 34,96
1— 2	+ 0,32	+ 0,42	+ 0,70	+ 1,71	− 4,91
2— 3	+ 0,34	+ 0,44	+ 0,68	+ 1,43	− 6,53
3— 4	+ 0,19	+ 0,23	+ 0,35	+ 0,78	− 9,49
4— 5	+ 0,12	+ 0,14	+ 0,20	+ 0,28	− 5,06
5— 6	+ 0,05	+ 0,07	+ 0,09	+ 0,06	− 2,54
6— 7	+ 0,07	+ 0,09	+ 0,11	+ 0,03	− 0,82
7— 8	− 0,01	+ 0,01	+ 0,02	− 0,13	+ 1,54
8— 9	+ 0,12	+ 0,06	+ 0,21	+ 0,31	+ 9,22
9—10	+ 0,25	+ 0,23	+ 0,50	+ 0,98	− 0,27
10—11	+ 0,36	+ 0,48	+ 0,66	+ 1,20	− 1,46
11—12	+ 0,43	+ 0,50	+ 0,72	+ 0,84	− 3,14
12—13	+ 0,26	+ 0,32	+ 0,39	+ 0,09	− 2,59
13—14	+ 0,22	+ 0,25	+ 0,26	− 0,21	− 0,39
14—15	—	—	—	—	—
$\delta\pi_{14} =$	+ 3,85 = 54,7 %	+ 3,06 = 43,5 %	+ 1,31 = 18,6 %	− 2,36 (= − 33,5 %)	− 1,48 (= −21,0 %)

$\delta p_0 = -4{,}28\ mb$

$\triangle z$ km	$\triangle_{1000}\,\delta\pi = mb$				
	$\nu = 1{,}0$	$\nu = 0{,}8$	$\nu = 0{,}5$	$\nu = 0{,}2$	$\nu = 0{,}0$
0— 1	− 0,49	− 0,58	− 0,92	− 2,23	− 38,45
1— 2	− 0,43	− 0,54	− 0,82	− 1,88	+ 8,08
2— 3	− 0,27	− 0,35	− 0,53	− 1,15	+ 14,20
3— 4	− 0,05	− 0,07	− 0,12	− 0,18	+ 9,92
4— 5	− 0,07	− 0,06	− 0,07	+ 0,04	+ 3,24
5— 6	− 0,00	+ 0,01	+ 0,03	+ 0,25	+ 2,16
6— 7	+ 0,02	+ 0,00	+ 0,03	+ 0,23	− 2,33
7— 8	− 0,04	− 0,05	− 0,06	+ 0,01	− 2,58
8— 9	− 0,08	− 0,09	− 0,12	− 0,12	− 4,02
9—10	− 0,15	− 0,19	− 0,29	− 0,52	− 0,07
10—11	− 0,23	− 0,28	− 0,39	− 0,63	+ 2,56
11—12	− 0,13	− 0,16	− 0,17	+ 0,15	+ 2,60
12—13	− 0,08	− 0,07	− 0,03	+ 0,41	+ 0,70
13—14	− 0,05	− 0,07	− 0,03	+ 0,34	− 0,14
14—15	− 0,11	− 0,12	− 0,09	+ 0,16	− 0,72
$\delta\pi_{14} =$	− 2,23 = 52,1 %	− 1,78 = 41,6 %	− 0,79 = 18,5 %	+ 1,00 (= − 23,4 %)	(− 0,15) (= 3,5 %)

eine vollständige Auffüllung eines in der Höhe entstandenen Tiefs zu erwarten ist, zumal, wie schon an anderer Stelle angedeutet, in den höheren Schichten die zuströmende Luft gleichsam „in ein Gefäß ohne Boden“ fließt. Man wird also mit dem Verhältnis 1 : 1 der beiden Anteile den wirklichen Verhältnissen sicherlich am nächsten kommen, und es wird daher die in Tabelle 3 für $\nu = 0{,}5$ gegebene Verteilung der advektiven Massenänderung wohl die wahrscheinlichste sein.

Der zweiten Rechnung möge nun die Kenntnis einer Beziehung zwischen $\delta \pi_z$ und δp zugrunde gelegt werden. Es werde angenommen, daß die in ein gegebenes Volumen einströmende Masse („zusätzliche“ Advektion) proportional sei dem Volumen selbst, der verstrichenen Zeit und dem Druckunterschied gegenüber der Umgebung. Unter Umgebung sei eine Zone verstanden, die so weit vom Advektionsgebiet entfernt ist, daß sie beim Vorgang der Advektion keine Druckänderungen erleidet. Wird dann noch angenommen, daß zu Beginn des gesamten Advektionsvorganges (zur Zeit t_0) keine Druckunterschiede gegenüber der Umgebung geherrscht haben, so ist jeweils der Druckunterschied durch das zugleich vorhandene δp gegeben. Der Proportionalitätsfaktor bleibt dabei noch abhängig von der Entfernung der unbeeinflußten Umgebung; denn je größer das von der Advektion betroffene Gebiet ist, desto größer ist das auszufüllende Defizit (bzw. der abzubauende Überschuß), während zugleich bei gegebenem δp der Gradient und damit die Transportgeschwindigkeit um so kleiner wird.

Es möge in eine zu einer Luftsäule mit dem Querschnitt 1 gehörige Schicht von der Höhe 1 bei einem Druckdefizit 1 gegenüber der Umgebung pro Zeiteinheit die Masse a einströmen. Beträgt also das Druckdefizit δp, so ergibt sich die Massenzufuhr

$$\delta M = a \, \delta p,$$

eine Schicht der Dicke dz bekommt davon den Anteil

$$d \, \delta M = a \, \delta p \, dz$$

pro Zeiteinheit. In einem Zeitelement Dt ergibt das eine Massenzufuhr von

$$D(d \, \delta M) = a \, \delta p \, dz \, Dt. \tag{52}$$

Da δp bei dem Vorgang nicht konstant bleibt, ist es — außer bei ganz kurzen Zeiträumen — notwendig, den Vorgang in kleine Schritte zu zerlegen und später zu integrieren. Statt $d \, \delta M$ schreiben wir zunächst dessen Druckäquivalent $-\frac{1}{g} d \, \delta \pi_z$, so daß der pro Zeitelement entstehende Anteil zum $\frac{\partial \, \delta \pi_z}{\partial z}$ den Wert

(53) $$D\left(\frac{\partial\,\delta\pi_z}{\partial z}\right) = -\,g\,a\,\delta p\,Dt$$

annimmt. Nach Ablauf der Zeit $t - t_0$ ist dann pro Einheitsschicht eine „zusätzliche" Massenzufuhr vom Druckäquivalent

(53a) $$\frac{\partial\,\delta\pi_z}{\partial z} = -\,g\,a\int_{t_0}^{t}\delta p\,dt$$

zustande gekommen. Setzt man diesen Wert in die Grundgleichung (35) ein, so ergibt sich

(54) $$\delta\pi = \delta p + g\varrho\int_0^z\left\{\frac{\delta\pi}{\varkappa p} - \frac{a}{\varrho}\int_{t_0}^{t}\delta p\,dt\right\}dz.$$

Löst man in derselben Weise wie früher nach $\delta\pi$ auf, so erhält man die Endformel

(55) $$\delta\pi = \delta p + g\vartheta^{-1}\int_0^z\vartheta\left[\frac{1}{\varkappa R}\,\frac{\delta p}{T} - a\cdot\int_{t_0}^{t}\delta p\,dt\right]dz.$$

Hat man es mit einem hinreichend kleinen Zeitraum $\triangle t$ zu tun, so kann man die Formel (55) schreiben:

(55a) $$\triangle\delta\pi = \triangle\delta p + g\vartheta^{-1}\int_0^z\vartheta\left[\frac{1}{\varkappa R}\,\frac{\triangle\delta p}{T} - a\,\delta p\,\triangle t\right]dz.$$

Da sich für a ohne weitere Kenntnis der einzelnen Fälle kein Zahlenwert angeben läßt, ist es nicht möglich, diese letzten Formeln auf die früher benutzten Mittelwerte anzuwenden. Es sollte hier vor allem gezeigt werden, wie sich spezielle Ansätze zur Ergänzung der Grundformel verwenden lassen, und deshalb soll auch der nun folgende dritte Ansatz wiedergegeben werden, trotzdem sich die hieraus abgeleitete Endformel ebenfalls nicht unmittelbar auf die Mittelwerte anwenden läßt.

Es sei zunächst ein kreisförmiges Tiefdruckgebiet (beim Hochdruckgebiet ist alles analog) gegeben. Überall herrsche der gleiche Gradient und damit die gleiche Geschwindigkeit v (von der Zentrifugalkraft und ihrem Einfluß auf v sei abgesehen), während der Ablenkungswinkel α sei, so daß eine Einströmungskomponente vom Betrage $v\cos\alpha$ vorhanden ist. Durch die Wand eines Kreiszylinders

von der Höhe 1 und dem Radius r, dessen Mittelpunkt mit demjenigen des Tiefs zusammenfällt, fließt daher pro Zeiteinheit die Masse

$$2\pi r \varrho v \cos\alpha$$

nach innen, während dieser Wert für einen konzentrischen Zylinder der gleichen Höhe und vom Radius $r + dr$

$$2\pi(r + dr)\varrho v \cos\alpha$$

beträgt, so daß in dem Ring innerhalb der beiden Zylindermäntel die Masse

$$2\pi dr \varrho v \cos\alpha$$

steckenbleibt. Da dieser Ring das Volumen

$$\pi(r + dr)^2 - \pi r^2 \approx 2\pi r dr$$

hat, so bleibt mithin in jeder um r vom Mittelpunkt des Tiefs entfernten Volumeneinheit durch Konvergenz pro Zeiteinheit die Masse

$$\delta m = \varrho \cos\alpha \frac{v}{r} \tag{56}$$

stecken. Man kann nun auch von der Voraussetzung kreisförmiger Isobaren absehen, und hat dann unter v die Geschwindigkeit an dem betrachteten Orte und unter r den Krümmungsradius der Isobaren an dieser Stelle zu verstehen.

Da sich v im allgemeinen rasch ändert (z. T. auch r), so müssen wir wiederum die kleinen Zeitabschnitte getrennt betrachten und erhalten als Druckäquivalent der im Zeitelement Dt in einer Schicht der Höhe dz steckengebliebenen Masse

$$D(d\,\delta\pi_z) = -g\varrho \cos\alpha \frac{v}{r} dz\, Dt. \tag{57}$$

Für die Zeit $t - t_0$ ergibt sich hieraus

$$\frac{\partial\,\delta\pi_z}{\partial z} = -g\varrho \cos\alpha \int_{t_0}^{t} \frac{v}{r} dt. \tag{57a}$$

In Verbindung mit der Grundformel entsteht dann die Beziehung

$$\delta\pi = \delta p + g\varrho \int_0^z \left\{ \frac{\delta\pi}{\varkappa p} - \cos\alpha \int_{t_0}^{t} \frac{v}{r} dt \right\} dz. \tag{58}$$

Entsprechend den früheren Umformungen läßt sich auch diese Gleichung nach $\delta\pi$ auflösen, und die Endformel lautet:

$$\delta\pi = \delta p + \frac{g}{R} \vartheta^{-1} \int_0^z \vartheta \left\{ \frac{\delta p}{\varkappa T} - \frac{p}{T} \cos\alpha \int_{t_0}^{t} \frac{v}{r} dt \right\} dz, \tag{59}$$

oder bei kleinen Zeitintervallen

$$(59\,a)\quad \Delta\,\delta\pi = \Delta\,\delta p + \frac{g}{R}\,\vartheta^{-1}\int_0^z \frac{\vartheta}{T}\left\{\frac{\Delta\,\delta p}{\varkappa} - p\cos\alpha\,\frac{v}{r}\,\Delta t\right\} dz.$$

Diese Beispiele zeigen, wie man mit der Grundformel und geeigneten speziellen Annahmen weiterarbeiten kann. Trotzdem ist es wohl klar, daß sich für wirklich beobachtete Fälle meist nur sehr schwer die geeigneten Vereinfachungen finden lassen; ja, es wird manchmal Fälle geben, in denen irgendwelche Vereinfachungen im Ansatz gar nicht zulässig sind. Es sei deshalb auf eine andere Behandlungsmöglichkeit des Advektionsproblems hingewiesen, die sich gerade für derart komplizierte Verhältnisse eignet, wie sie die Advektion eben darstellt: Man verzichtet darauf, beobachtete Werte zur Rechnung heranzuziehen und berechnet statt dessen mit Hilfe der Grundformel Reihen von δp, indem man alle möglichen Werte und Zusammenhänge von $\delta\pi_a$, $\delta\pi_z$, δp, δq, v usw. vorgibt. Ergeben sich dann jeweils charakteristische Verteilungen der δp, dann könnte man durch Vergleich gemessener Reihen mit den berechneten auf den wahrscheinlichen Ablauf der betreffenden Advektionsvorgänge schließen. Es würde diese Methode allerdings — unabhängig von Umfang und Wert des später zu untersuchenden Materials — eine im voraus zu leistende, ungeheuere Rechenarbeit erfordern, ohne daß man vor deren Abschluß über die Brauchbarkeit des Ergebnisses zu urteilen in der Lage wäre, sodaß man erst dann darauf zurückgreifen wird, wenn man auf den oben vorgeschlagenen oder auf ähnlichen direkten Wegen gar nicht zum Ziel kommt.

Zusammenfassung.

Nach Vorzeichnung der Aufgabe einer Advektionstheorie werden im ersten Teile der Arbeit die vorhandenen Advektionstheorien, ihre Entwicklung und ihre Zusammenhänge, sowie einige Anwendungen, ausführlich dargestellt. Ausgehend von den Mängeln dieser Theorien wird dann im zweiten Teil die Grundlage einer neuen Advektionstheorie gegeben, wobei es sich infolge der Kompliziertheit der Vorgänge als unmöglich erweist, diese Grundlage bis zu einer allgemeingültigen Endformel zu entwickeln, sodaß von Fall zu Fall die Ableitung von Sonderformeln unter geeigneten speziellen Voraussetzungen notwendig wird. An Hand von Beispielen und einer Anwendung auf beobachtete Werte wird die Brauchbarkeit dieser Methode erwiesen.

Literatur.

[1]) H. v. Ficker, Beziehungen zwischen Änderungen des Luftdruckes und der Temperatur in den unteren Schichten der Troposphäre. Wien. Sitz.-Ber. 1920 S. 763.

[2]) — Bemerkungen über die Konstitution zusammengesetzter Depressionen. Meteorol. Zeitschr. 1921 S. 65—70.

[3]) — Über den Druckeffekt stratosphärischer Kälteeinbrüche. Meteorol. Zeitschr. 1921 S. 369.

[4]) — Der Sturm in Norddeutschland am 4. Juli 1928. Sitz.-Ber. d. Preuß. Akad. d. Wiss., Phys.-Math. Kl., 1929 S. 290—326.

[5]) A. Defant, Theoretische Überlegungen und experimentelle Untersuchungen zum Aufbau hoher Zyklonen und Antizyklonen. Wien. Sitz.-Ber. 1923 S. 81.

[6]) — Schwingungen einer zweifach geschichteten Atmosphäre und ihr Verhältnis zu den Wellen im Luftmeer. Beitr. z. Phys. d. fr. Atm. Bd. 12 S. 112.

[7]) — Primäre und sekundäre — freie und erzwungene Druckwellen in der Atmosphäre. Wien. Sitz.-Ber. 1926 S. 357.

[8]) E. Palmén, Über die Natur der Luftdruckschwankungen in höheren Schichten. Beitr. z. Phys. d. fr. Atm. Bd. 14 S. 147.

[9]) F. M. Exner, Über den Einfluß von Luftdruckänderungen in großen Höhen auf die vertikale Temperaturverteilung. Köppen-Heft d. Ann. d. Hydr. u. marit. Meteorol. 1926 S. 20—26.

[10]) L. Steiner, Druck- und Temperaturänderungen in der Atmosphäre. Meteorol. Zeitschr. 1926 S. 271—276.

[11]) B. Haurwitz, Einfluß von Massenänderungen in großen Höhen auf die vertikale Temperaturverteilung. Ebenda 1927 S. 253—260.

[12]) C. G. Rossby, Zustandsänderungen in atmosphärischen Luftsäulen. Beitr. z. Phys. d. fr. Atmosph. Bd. XIII S. 164—174, 1927.

[13]) — Studies in the Dynamics of the Stratosphere. Ebenda Bd. XIV, S. 240—265, 1928.

[14]) H. Ertel und S. Li, Der Advektionsmechanismus der atmosphärischen Druckschwankungen. Zeitschr. f. Phys. Bd. 94 Heft 9 u. 10 S. 662, 1935.

[15]) H. Thomas, Das Zustandekommen eines Druckanstieges von 35 mm durch einen stratosphärischen Kaltlufteinbruch ohne Mitwirkung troposphärischer Vorgänge. Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wissensch., Phys.-Math. Klasse, 1934, XVII.

[16]) — Zum Mechanismus stratosphärisch bedingter Druckänderungen. Meteorol. Zeitschr. 1935 S. 41—48.

[17]) H. Ertel, Zur Dynamik der atmosphärischen Druckschwankungen. Gerlands Beitr. Bd. 25 Heft 1, 1930.
[18]) A. Schedler, Über den Einfluß der Lufttemperatur in verschiedenen Höhen auf die Luftdruckschwankungen am Erdboden. Beitr. z. Phys. d. freien Atmosph. 1917 Bd. VII S. 88—101.
[19]) B. Haurwitz, Beziehungen zwischen Luftdruck- und Temperaturänderungen. Veröff. d. Geophysik. Instituts d. Univ. Leipzig, 2. Serie Bd. III Heft 5, 1927.
[20]) W. S. Diehl, Standard atmosphere-tables and data. National Advisory Committee for Aeronautics, Report Nr. 218, Washington 1926.

Lebenslauf.

Am 24. Dezember 1911 wurde ich, Joachim Hans Paul Bartsch, zu Berlin-Steglitz als Sohn des Ingenieurs Hans Bartsch und seiner Ehefrau Erna geb. Kühnel geboren. Meine Schulzeit absolvierte ich in Berlin-Zehlendorf, wo ich von Ostern 1918 bis Ostern 1921 die Vorschule, von Ostern 1921 bis zur Reifeprüfung 1930 die Oberrealschule besuchte. Anschließend begann ich das Studium der Meteorologie, Physik, Mathematik, Ozeanographie und Philosophie an der Universität Berlin, der ich — mit Ausnahme des an der Universität Halle verbrachten Sommersemesters 1931 — bis Ostern 1935 angehörte. Ich hörte Vorlesungen der Herren Dozenten: v. Ficker, Defant, Hettner, Rieffert, Baer, Bartels, Baumgardt, Bieberbach, Feigl, Gehrke, Glum, Hammerstein, Hoffmann, Holdefleiß, Kähler, Knoch, W. Köhler, König, Kopff, Less, v. Mises, Nernst, Reichenbach, Robitzsch, E. Schmidt, F. J. Schmidt, Schrödinger, Schur, Siegmund-Schulze, Utitz, Vorländer, Wehnelt. — Von Juli bis Oktober 1934 hatte ich Gelegenheit, am Marineobservatorium in Wilhelmshaven zu praktizieren.

Das Zustandekommen vorliegender Arbeit verdanke ich Herrn Professor v. Ficker, dem ich auch für das weitgehende Interesse an deren Verlauf zu großem Dank verpflichtet bin.